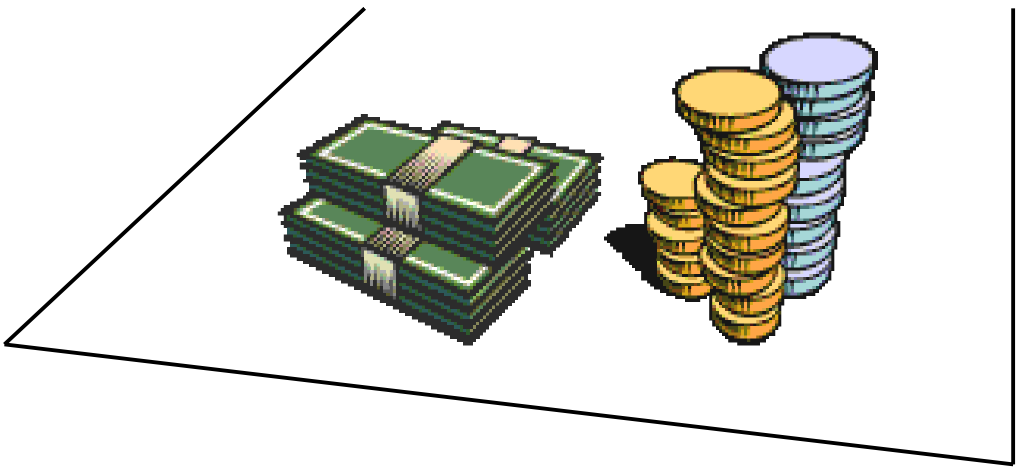
Mandags Chancen

En optimal spilstrategi



Erik Vestergaard

Spilleregler

I denne note skal vi studere en ”optimal spilstrategi” i det spil, som i fjernsynet går under navnet *Mandags Chancen*. Spillets regler er som følger: I ni felter på et bræt er på tilfældig måde anbragt følgende beløb: 2 stk. 10.000, 2 stk. 25.000, 2 stk. 50.000, 2 stk. 100.000 og 1. stk. 250.000. Spilleren kender beløbene, men ved ikke i hvilke felter, de enkelte beløb er placeret, eftersom de er dækket af et gummilag. Spilleren får nu lov til at skrabe ét felt af gangen, dog højst tre felter i alt. Det er tilladt inden et tredje skrab at ”stige af” og modtage det sidst skrabede beløb. Foretager spilleren derimod et tredje skrab, så er han nødsaget til at modtage det beløb, der måtte vise sig her.

10.000	50.000	250.000
25.000	50.000	10.000
25.000	100.000	100.000

Stopstrategier

Spørgsmålet er nu, hvilken *stopstrategi* spilleren skal vælge for at optimere sine muligheder? Hvad der menes med disse ord er selvfølgelig en subjektiv vurdering. Måske står spileren lige og mangler 50.000 kr. til en motorcykel, hvorfor det er vigtigt for ham, at han vinder mindst 50.000 kr. Personen vil da måske vælge at stoppe på 50.000 kr. selvom han vil have en god mulighed for at vinde endnu mere. For ham er det måske vigtigere, at han ikke er uheldig og kun vinder 10.000 kr. eller 25.000 kr. Vi skal først have en definition:

Definition

Med begrebet en *optimal stopstrategi* vil vi mene en strategi, der ved gentagne spil vil give *en større eller mindst lige så stor forventet gennemsnitlig gevinst, som ved anvendelse af enhver anden stopstrategi.*

Mandags Chancen er et spil, der ikke er mere omfattende, end at det kan analyseres i hånden. I spil med et meget stort antal spiludfald kan det være nødvendigt at anvende computer til analysen. I visse tilfælde vil end ikke verdens største computer have kapacitet nok til at udregne den bedste strategi indenfor en rimelig tid. For at få en idé om den bedste strategi i Mandags Chancen er det en god idé at betragte en forenklet udgave af spillet, for eksempel ét, hvor der er fire felter med beløbene 10.000, 10.000, 20.000 og 30.000 og muligheder for at skrabe højst to gange.

10.000	20.000
30.000	10.000

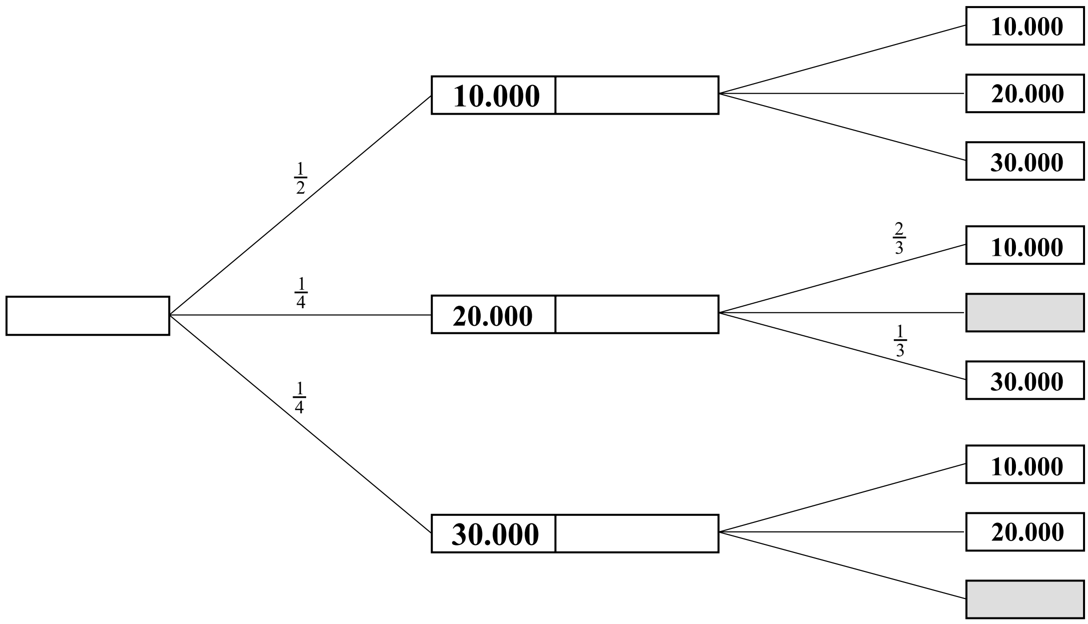
Øvelse 1

1) Overvej, om du vil stoppe, hvis du i første skrab får
   a) 10.000
   b) 20.000
   c) 30.000

2) Antag, at vi ønsker at ændre beløbet på den største præmie. Hvad skal beløbet mindst ændres til, før du skifter mening med hensyn til at stoppe/ikke stoppe i spørgsmål 1b) ovenfor?

3) Prøv at give en matematisk opskrift, med hvilken man kan afgøre, om man skal stoppe/ikke stoppe efter første skrab.

Man kan danne sig et vist overblik over situationen ved at tegne et såkaldt *udfaldstræ*. Forgreningerne viser de mulige udfald, når der skrabes. De involverede beløb er $B_1 = 10.000,\ B_2 = 20.000,\ B_3 = 30.000$. Lad os vedtage at kalde et udfald for udfald 1, hvis B_1 skrabes, udfald 2 hvis B_2 skrabes og udfald 3, hvis B_3 skrabes. På figuren nedenfor har jeg indtegnet to forgreningsniveauer, svarende til de to skrabemuligheder. De skraverede felter repræsenterer "udsolgte" beløb. Ved hver forgrening kan man angive sandsynligheden for at få det pågældende udfald, givet den viden, man har om de beløb, der allerede er skrabet. I første forgrening er sandsynligheden for udfald 1, udfald 2 og udfald 3 henholdsvis ½, ¼ og ¼.



Ved 2. forgrening ved man hvad der blev skrabet i første omgang. Lad os sige, at første skrab gav udfald 2. Da vil der til et eventuelt sidste skrab kun være 2 stk. 10.000 og 1 stk. 30.000 tilbage. Derfor vil sandsynligheden fra udfald 1 og udfald 3 være henholdsvis 2/3 og 1/3, mens udfald 2 ikke kan forekomme (se skravering).

Øvelse 2

Udregn de manglende sandsynligheder for udfaldene i 2. forgreningsniveau og indtegn dem i udfaldstræet.

Lidt Teori

Set over mange spil, så vil man gennemsnitligt få mest ud af det, såfremt man følger den såkaldte *optimale Snell-strategi* eller bare *Snell-strategien*. Den er defineret ved:

> *Man stopper spillet, såfremt man i gennemsnit ikke kan forvente at opnå mere ved at fortsætte spillet, underforstået under brug af Snell-strategien.*

At denne strategi er fornuftig er vel heller ikke så mærkeligt: Hvorfor fortsætte spillet, hvis man gennemsnitligt ikke kan forvente at vinde mere ved at fortsætte?

For at kunne analysere Snell-strategien er det hensigtsmæssigt med et lidt mere generelt setup, hvor vi tillader op til N skrab, hvor antallet af forskellige beløb er n, og hvor beløbene er $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Som tidligere vil vi kalde et udfald for udfald 1, hvis B_1 skrabes, udfald 2 hvis B_2 skrabes, etc.

Som tidligere set, giver spillet anledning til et udfaldstræ. En position heri er beskrevet ved de udfald $k_1, k_2, \ldots, k_r$, man møder ved at gå baglæns tilbage i træet til træets rod. Man kan sige, at med *informationen* $I = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$ kender man de udfald, der allerede *er* forekommet i de hidtidige skrab, inklusiv rækkefølgen. Til hver position *I* i udfaldstræet kan vi nu definere nogle størrelser:

$P_I(k)$ Sandsynligheden for et udfald *k* i næste skrab, givet informationen *I*.

V_I Den forventede gennemsnitlige gevinst ved at *fortsætte* med at skrabe, givet informationen *I*.

F_I Den forventede gennemsnitlige gevinst, givet informationen *I*.

Bemærk, at når vi her taler om den forventede gennemsnitlige gevinst, så mener vi under anvendelse af Snell-strategien.

Man noterer sig, at den forventede gennemsnitlige gevinst løbende ændrer sig, når man skraber løs. Det, der er tilbage at skrabe, afhænger nemlig af informationen *I*. Derfor benyttes betegnelsen *den forventede gennemsnitlige gevinst, givet I*. Tilsvarende med de andre to størrelser. Man får nu nemt følgende sammenhæng, idet B_{k_r} er det sidst skrabede beløb:

(1) $$F_I = \max(B_{k_r}, V_I)$$

Identiteten (1) er en direkte konsekvens af, at man vælger at stoppe, hvis det sidst skrabede beløb B_{k_r} er mindst lige så stort som den gevinst, man i gennemsnit vil kunne forvente at opnå ved at fortsætte. Vi har desuden følgende:

(2) $$V_I = \sum_{k=1}^{n} \left(P_I(k) \cdot F_{I_k} \right)$$

hvor $I_k = (k_1, k_2, \ldots, k_r, k)$. I summen (2) kan det forekomme, at visse af F_{I_k}'erne ikke har mening. Dette sker hvis der ikke er flere udfald k tilbage i de uskrabede felter. I disse tilfælde vedtager vi den konvention at lade det være underforstået, at man undlader de pågældende led i summen. Derved bliver udtrykket for V_I korrekt.

Identiteten (2) udtrykker, at den forventede gennemsnitlige gevinst ved at *fortsætte* med at skrabe fra position *I* fås ved at udregne det *vejede gennemsnit* af de forventede gennemsnitlige gevinster i de positioner I_k, man vil kunne nå med det ekstra skrab. Når Snell-strategien sættes på formel, får den følgende udseende: *Man stopper første gang* $B_{k_r} \geq V_I$.

Snell-strategien anvendt på det forenklede spil

Lad os analysere, hvordan Snell-strategien udmønter sig i tilfældet med det forenklede skrabespil. Sandsynlighedsvægtene er allerede udregnet i øvelse 2 eller før. I øvrigt er Snell-strategien defineret rekursivt bagfra, så for at bestemme de enkelte *V*-værdier og *F*-værdier, må vi "trevle" situationen op ved at begynde med det sidste forgreningsniveau i udfaldstræet, altså niveau $N = 2$, og derfra arbejde os baglæns igennem træet. Se i øvrigt figuren på side 6.

Niveau 2

I højeste niveau starter vi med *F*-værdierne.

$$F_{1,1} = B_1 = 10.000 \qquad F_{1,2} = B_2 = 20.000 \qquad F_{1,3} = B_3 = 30.000$$
$$F_{2,1} = B_1 = 10.000 \qquad\qquad\qquad\qquad F_{2,3} = B_3 = 30.000$$
$$F_{3,1} = B_1 = 10.000 \qquad F_{3,2} = B_2 = 20.000$$

Begrundelse: Man har foretaget de maksimalt to skrab, som er tilladt. Dermed er man nødsaget til at beholde det, man har fået i sidste skrab. Dette er så samtidigt lig med den forventede gennemsnitlige gevinst, givet udfaldet af de to første skrab.

Niveau 1

Først udregnes *V*-værdierne ved hjælp af (2):

$$V_1 = \sum_{k=1}^{3} P_1(k)\cdot F_{1,k} = \tfrac{1}{3}\cdot 10.000 + \tfrac{1}{3}\cdot 20.000 + \tfrac{1}{3}\cdot 30.000 = 20.000$$
$$V_2 = \sum_{k=1}^{3} P_2(k)\cdot F_{2,k} = \tfrac{2}{3}\cdot 10.000 + \tfrac{1}{3}\cdot 30.000 = 16.666{,}67$$
$$V_3 = \sum_{k=1}^{3} P_3(k)\cdot F_{3,k} = \tfrac{2}{3}\cdot 10.000 + \tfrac{1}{3}\cdot 20.000 = 13.333{,}33$$

Herefter kan *F*-værdierne findes ved hjælp af (1):

$$F_1 = \max(B_1, V_1) = \max(10.000; 20.000) = 20.000$$
$$F_2 = \max(B_2, V_2) = \max(20.000; 16.666{,}67) = 20.000$$
$$F_3 = \max(B_3, V_3) = \max(30.000; 13.333{,}33) = 30.000$$

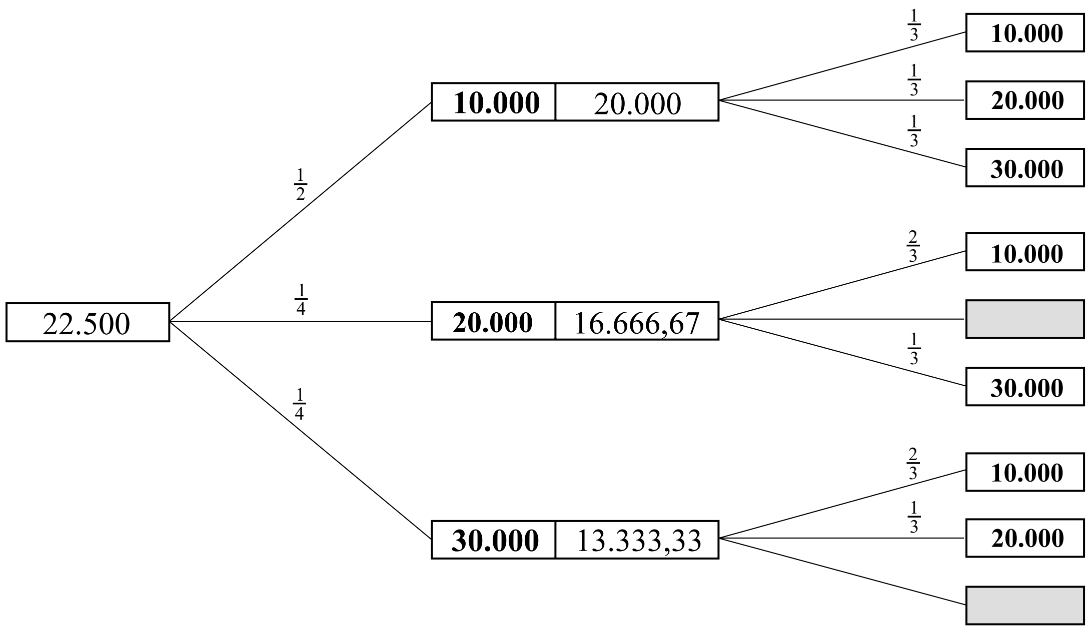
Niveau 0

Først udregnes V-værdien ved hjælp af (2):

$$V = \sum_{k=1}^{3} P(k) \cdot F_k = \tfrac{1}{2} \cdot 20.000 + \tfrac{1}{4} \cdot 20.000 + \tfrac{1}{4} \cdot 30.000 = 22.500$$

og da der endnu ikke er skrabet noget felt i niveau 0, så er $F = 22.500$.

I udfaldstræet for det forenklede skrabeproblem på side 3 har jeg anbragt nogle tomme felter. Det er meningen, at man her skal anføre de til positionen hørende V-værdier. Ifølge ovenstående beregninger kommer det udfyldte træ til at se ud som på figuren nedenfor. Man ser, at man skal stoppe spillet, hvis man skraber 20.000 eller 30.000 i første skrab, for i disse tilfælde er det sidste og eneste skrabede beløb større end den tilsvarende V-værdi, som er den forventede gennemsnitlige gevinst ved at fortsætte. Måske var det den samme strategi du fandt på i øvelse 1?



Øvelse 3

1) Undersøg den optimale Snell-strategi i forbindelse med Mandags Chancen ved at regne dig baglæns igennem udfaldstræet som i det enklere tilfælde ovenfor.

   Løst sagt: F-værdierne i tredje og sidste niveau er lig med de sidst skrabede beløb. Gå til forrige niveau. Udregn her V-værdier som vejede gennemsnit af de relevante F-værdier i niveauet højere. Opskriv de udregnede V-værdier på de respektive pladser i træet. Udregn for hver position i det betragtede niveau i træet maksimum mellem det netop skrabede beløb og den tilhørende V-værdi (står side om side i træet). Dette er positionens F-værdi. Gå til forrige niveau og gentag proceduren etc. etc.

2) Hvor meget vil man i længden i gennemsnit kunne forvente at vinde i Mandags Chancen ved brug af den optimale Snell Strategi?

3) Besvar følgende spørgsmål udfra tallene i det udfyldte udfaldstræ og giv samtidigt en logisk forklaring på, hvorfor det forholder sig sådan: a) Hvad er det bedste beløb at få i første skrab? b) Det næstbedste? c) Tredjebedste?

4) Hvad er sandsynligheden for at ende med hovedgevinsten på 250.000, hvis man anvender Snell-strategien?

Øvelse 4

1) Lad os overveje en helt anden stopstrategi i det forenklede skrabespil: At man stopper i det øjeblik, man får den maksimale gevinst på 30.000. Underforstået, at hvis den ikke kommer, så skraber man til enden. Vis, at den forventede gennemsnitlige gevinst ved denne strategi er lig med 21.666,67, altså mindre end den optimale Snell-strategi.

   Hjælp: Du kan bruge udfaldstræet på side 7. I den forbindelse får du ikke brug for V-værdierne anbragt i de to tomme felter, for de involverer som bekendt Snell-strategien.

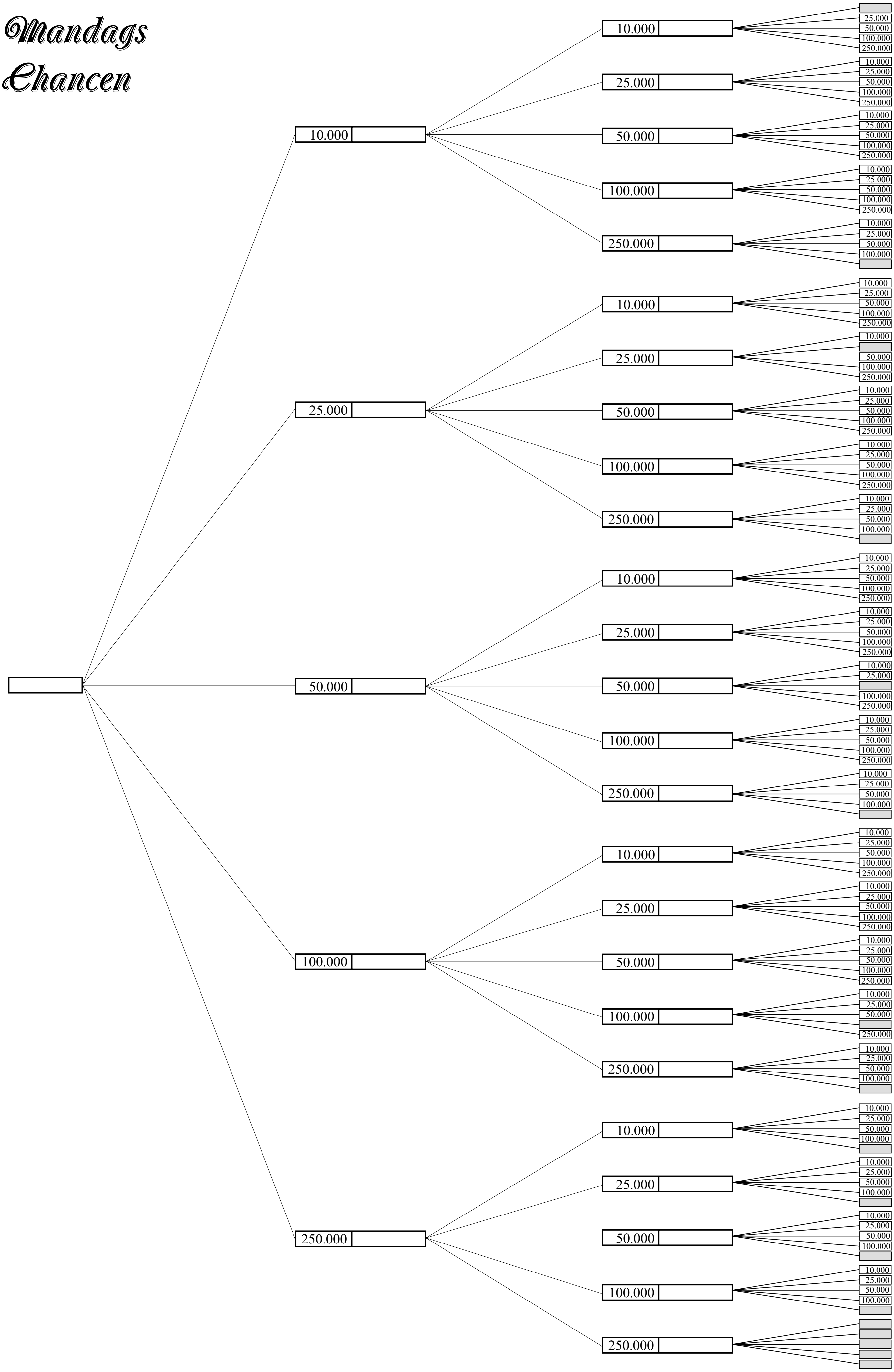
Betragt den tilsvarende strategi i tilfældet med Mandags Chancen: At man kun stopper spillet før tid, såfremt man får den maksimale gevinst på 250.000. Det kan vises, at man i længden ved brug af denne strategi vil få en forventet gennemsnitlig gevinst på 114.166,67 – altså ikke så meget som i tilfældet med den optimale Snell-strategi!

2) Undersøg ved hjælp af udfaldstræet for Mandags Chancen følgende strategi: At man stopper første gang man får minimum 50.000.

Øvelse 5

Undersøg følgende mere sofistikerede strategi i tilfældet med Mandags Chancen:
Man stopper efter første skrab, hvis man får 100.000 eller derover. Hvis man ikke får dét i første skrab, anvendes følgende stopstrategi efter 2. skrab: Man stopper ved 50.000 og derover, med mindre det første skrab viste 10.000, i hvilket tilfælde man vælger at stoppe ved 100.000 og derover.

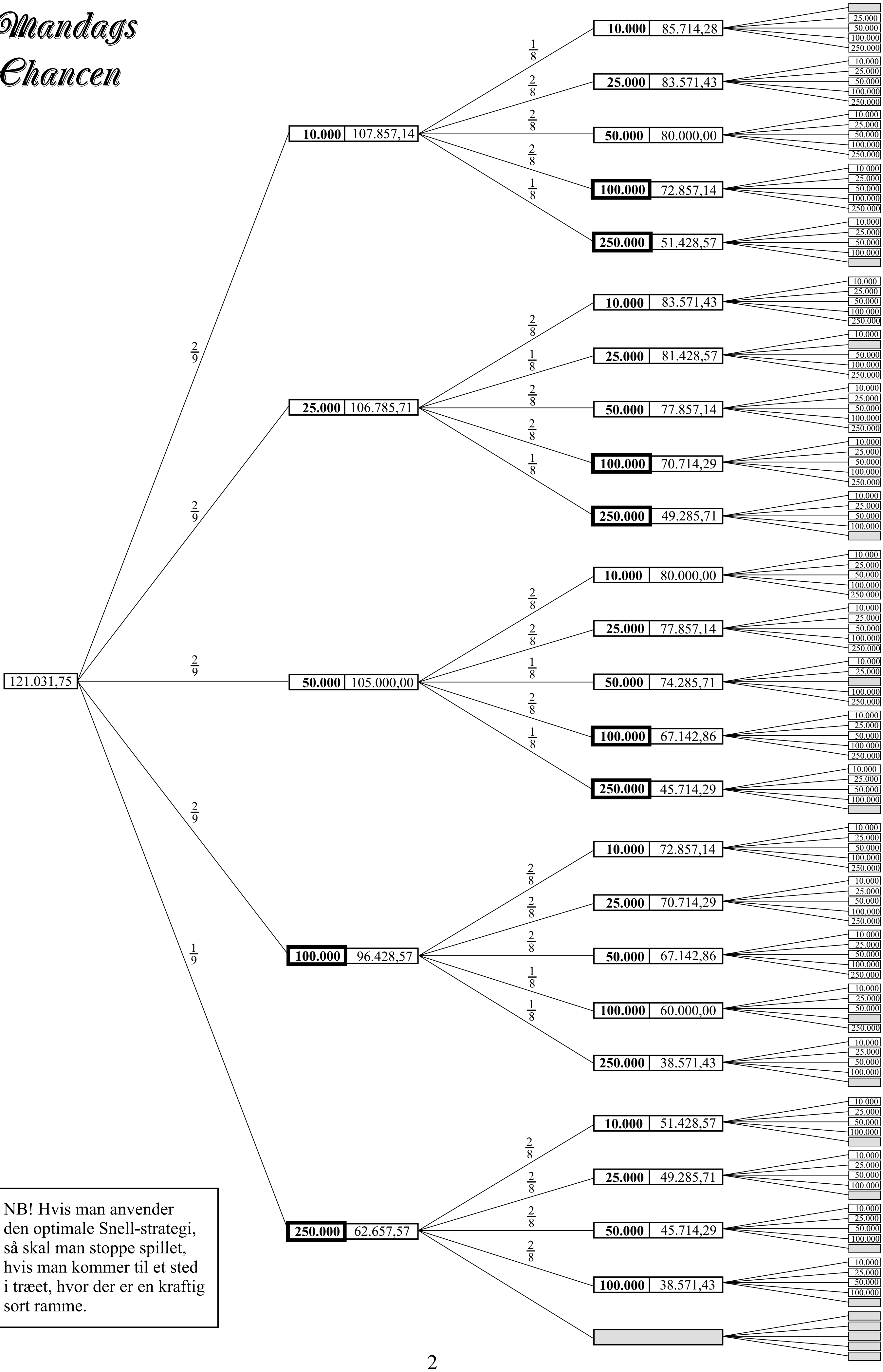
Mandags Chancen



Løsning

til udfyldning af udfaldstræet
for Mandags Chancen

Mandags Chancen



NB! Hvis man anvender
den optimale Snell-strategi,
så skal man stoppe spillet,
hvis man kommer til et sted
i træet, hvor der er en kraftig
sort ramme.