Jeffersons metode og D'Hondts metode er ækvivalente

Jeffersons metode til mandatfordeling, der blev anvendt i USA fra 1792 til 1840, er et eksempel på en såkaldt *mandatprismetode*. Metoden bygger på, at der opstilles en bestemt *pris p* for hvert mandat. Lad os sige, at et parti *P* får 2380 stemmer og man fastsætter en mandatpris på 670. Man dividerer da stemmetallet med prisen for ét mandat og får $2380/670 = 3{,}55$. Herefter tages *heltalsdelen* af tallet: $\text{int}(3{,}55) = 3$. Partiet *P* får dermed 3 mandater. Det er klart, at hvis man sætter mandatprisen ned, så vil hvert parti få mindst lige så mange mandater som tidligere, eller hvis man modsat sætter mandatprisen op, så vil hvert parti få højst lige så mange mandater som tidligere. Spørgsmålet er om man kan fastsætte en mandatpris, så man opnår et bestemt samlet mandattal på et givet tal *M*? Svaret er, at det som regel altid er muligt i praksis. Der er dog kombinationer af stemmetal, hvor det ikke kan lade sig gøre. Vi vil kalde en mandatpris *brugbar*, hvis det giver anledning til det korrekte samlede antal mandater *M*. Lad os være mere præcise:

Definition 1 (Jeffersons metode)

Der vælges en *mandatpris p* for ét mandat. Antallet af mandater m_P for hvert parti *P* fastlægges da som $m_P = \text{int}(s_P/p)$, hvor s_P er stemmetallet for partiet *P* og hvor funktionen int er *heltalsdelen*. Brøkdelen smides altså væk! Mandatprisen kaldes *brugbar*, såfremt den totale mandatsum $\sum_P m_P$ er lig med det på forhånd givne mandattal *M*.

I det danske folketing er $M = 179$. Vi har tidligere betragtet *D'Hondts metode*, som er den mandatfordelingsmetode, som blev indført af den belgiske jurist og matematiker *Victor D'Hondt* i 1878. Den viser sig at være "den samme" som Jeffersons metode:

Sætning 2

Hvis der *ikke* opstår en uafgjort situation ved anvendelse af D'Hondts metode, så er metoden ækvivalent med Jeffersons metode, dvs. de to metoder giver samme mandatfordeling.

For at forstå idéen i et bevis for sætningen er det hensigtsmæssigt at kigge på et eksempel. Vi har i tabellen på næste side fem partier A, B, C, D og E med de angivne stemmetal. Der skal vælges i alt 17 mandater. Ifølge D'Hondts metode skal man da for hvert parti udregne kvotienterne af stemmetallene ved division med 1, 2, 3, … og så udvælge de 17 største kvotienter. De er i skemaet på næste side markeret med rødt. Resultatet af afstemningen er altså at parti A får 1 mandat, parti B får 3 mandater, parti C får 2 mandater, parti D får 10 mandater og parti E får 1 mandat. Vi ser, at der ikke er opstået en uafgjort situation. Idéen er nu som mandatpris *p* at vælge et tal, som er mindre end eller lig med den mindste kvotient, som giver anledning til et mandat og som samtidig er skarpt større end de øvrige kvotienter, som *ikke* gav anledning til mandater. På figuren er det alle de røde, som gav anledning til et mandat, og det mindste tal blandt disse er 266. Det største tal blandt de ikke tildelende kvotienter er 251.

D'Hondts metode		Divisorer										
Parti	Stemmetal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	431	431	215	143	107	86	71	61	53	47	43	39
B	1007	1007	503	335	251	201	167	143	125	111	100	91
C	722	722	361	240	180	144	120	103	90	80	72	65
D	2660	2660	1330	886	665	532	443	380	332	295	266	241
E	294	294	147	98	73	58	49	42	36	32	29	26

Vi skal altså vælge en mandatpris p, som opfylder: $266 \geq p > 251$. Tallet behøver i princippet ikke en gang at være et helt tal. Vi vælger blot et tilfældigt: 260. Jeffersons metode giver nu:

$$m_{\mathrm{A}} = \mathrm{int}\left(431/260\right) = \mathrm{int}(1,658) = 1, \quad m_{\mathrm{B}} = \mathrm{int}\left(1007/260\right) = \mathrm{int}(3,873) = 3$$

$$m_{\mathrm{C}} = \mathrm{int}\left(722/260\right) = \mathrm{int}(2,777) = 2, \quad m_{\mathrm{D}} = \mathrm{int}\left(2660/260\right) = \mathrm{int}(10,231) = 10$$

$$m_{\mathrm{E}} = \mathrm{int}\left(294/260\right) = \mathrm{int}(1,131) = 1$$

altså samme mandatfordeling som D'Hondt! Vi savner et lidt mere formelt bevis med bogstaver for påstanden i sætningen. Selve det formelle bevis vil jeg lede læseren igennem i nedenstående opgave.

Opgave 3

a) Redegør for rigtigheden af følgende påstand: For partiet P er den sidste kvotient, der giver et mandat, s_P/m_P, og den første kvotient, som *ikke* giver et mandat, er tilsvarende $s_P/(m_P+1)$.

b) Redegør for, hvorfor idéen antydet med et taleksempel ovenfor svarer til at finde en mandatpris p, så følgende er opfyldt:

(1) $$\frac{s_P}{m_P} \geq p > \frac{s_P}{m_P+1} \qquad \text{for ethvert parti } P$$

c) Argumenter for, at $m_P+1 > \dfrac{s_P}{p} \geq m_P \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{int}(s_P/p) = m_P$.

d) Vis at udsagnet (1) er ensbetydende med følgende udsagn:

(2) $$m_P+1 > \frac{s_P}{p} \geq m_P \qquad \text{for ethvert parti } P$$

Hjælp: Du skal dele dobbeltuligheden i (1) op i to uligheder med et $\wedge$ (og-tegn) imellem og derefter foretage nogle omskrivninger af ulighederne.

e) Afslut beviset for sætning 1: Argumenter for at hvis en mandatpris p (om muligt) vælges, så den opfylder (1), så vil den give anledning til at Jeffersons metode giver samme mandatfordeling som D'Hondts metode. Benyt her c).

□

Bemærkning 4

Det bør lige bemærkes, at der opstår en uafgjort situation med D'Hondts metode, hvis den mindste mandatgivende kvotient forekommer i flere dubletter end der er mandater tilbage at fordele. Det afspejler sig i Jeffersons metode ved at der ikke er "plads" til at vælge en mandatpris p (Overvej!).

Lad os for en ordens skyld også kigge på den beslægtede metode kaldet *Websters metode*, foreslået af den amerikanske advokat og statsmand *Daniel Webster* i 1832:

Definition 5 (Websters metode)

Der vælges en *mandatpris p* for ét mandat. Antallet af mandater m_P for hvert parti P fastlægges da som $m_P = \text{Round}\left(s_P/p\right)$, hvor s_P er stemmetallet for partiet P og hvor funktionen Round betyder almindelig afrunding. Mandatprisen kaldes *brugbar*, såfremt den totale mandatsum $\sum_P m_P$ er lig med det på forhånd givne mandattal M.

Sætning 6

Hvis der *ikke* opstår en uafgjort situation ved anvendelse af Sainte-Laguës metode, så er metoden ækvivalent med Websters metode, dvs. de to metoder giver samme mandatfordeling.

Opgave 7

Forsøg at gennemføre et bevis for denne sætning i stil med beviset i opgave 3.

Hjælp: Vælg (om muligt) mandatprisen p, så:

$$\frac{s_P}{m_P - \frac{1}{2}} \geq p > \frac{s_P}{m_P + \frac{1}{2}} \qquad \text{for ethvert parti } P$$