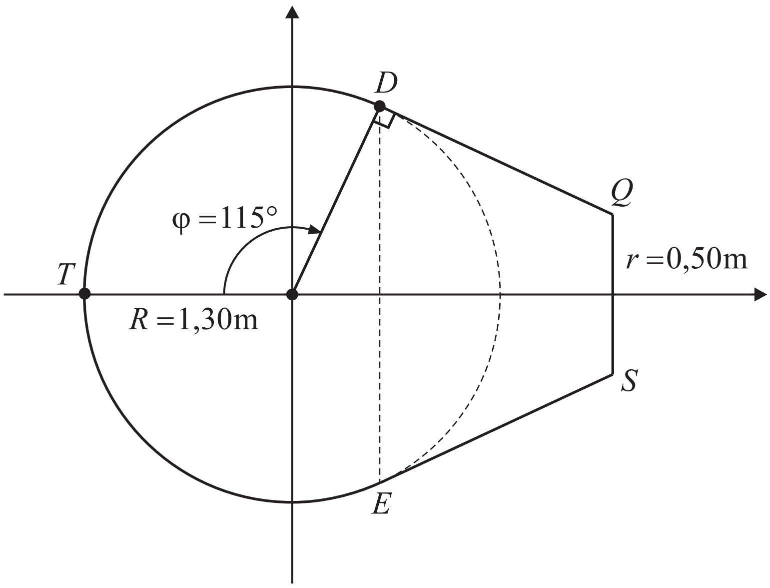
Beregninger over en varmluftsballon

Formålet med denne projektopgave er at beregne volumenet af en varmluftsballon ved hjælp af nogle beregninger og brug af en grafisk lommeregner. Endvidere skal du udlede formler for en generel *keglestub* og et *kuglesegment*. Nedenfor er beskrevet et design for en ballon, som har været fremstillet i fysiktimerne. En række lange papirstrimler blev limet sammen til en varmluftsballon.

Figur 1



En mulighed for formen for en ballon er at lade den øverste del være en *kugle*, som går glidende over i en *keglestub*. Figur 1 viser en snitkurve af ballonen, som er blevet lagt ned. Et koordinatsystem anbringes med origo i kuglens centrum således, at ballonens toppunkt *T* ligger på *x*-aksen. For at ballonen bliver stærk er det vigtigt, at der ikke er nogen skarpe kanter på ballonen. Derfor skal man i sammenføjningspunktet *D* have cirklen til at gå over i et linjestykke *DQ*, som er *tangent* til cirklen. Ballonens højde *h* er indirekte bestemt af, at vi ønsker at ballonåbningen forneden skal være en cirkel med radius $r = 0{,}50\,\text{m}$. Cirklen med toppunkt i *T* har radius $r = 1{,}30\,\text{m}$.

a) Bestem koordinaterne til punktet *D*.
b) Bestem ligningen for linjen, som går igennem *D* og som er tangent til cirklen i *D*.
c) Bestem *x*-koordinaten for punktet *Q* ved hjælp af linjen fra b).
d) Find forskriften for den funktion, der som graf har cirkelbuen fra *T* til *D*.
e) Benyt formlen for *omdrejningslegemer* til at angive udtryk for volumenet af *kuglesegmentet* og *keglestubben*.
f) Benyt den grafiske lommeregner til at beregne volumenerne af de to legemer i e), og dermed det samlede volumen for ballonen.

Man kan vise, at der gælder nedenstående generelle formler for højden h af ballonen, volumenet V af ballonen og overfladearealet S af ballonen. Det vil føre for vidt at udlede disse, da det kræver mange omskrivninger.

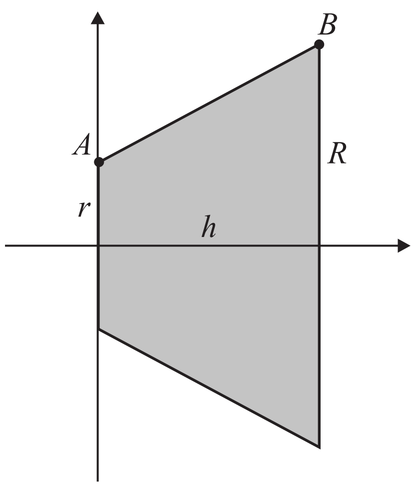
$$h = R\cdot\left(1 - \frac{1}{\cos(\varphi)}\right) + r\cdot\tan(\varphi)$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^3\cdot\left(2 - \cos(\varphi) - \frac{1}{\cos(\varphi)}\right) + \tfrac{1}{3}\pi r^3\tan(\varphi)$$

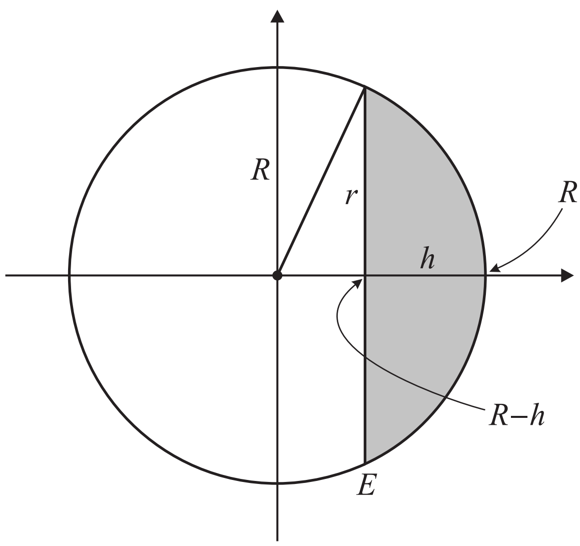
$$S = 2\pi R^2\cdot\left(1-\cos(\varphi)\right) + \frac{\pi\cdot\left(r^2 - R^2\sin^2(\varphi)\right)}{\cos(\varphi)}$$

Du kan eventuelt benytte formlen for V til at kontrollere dit resultat fra spørgsmål f). Til slut skal du forsøge at udlede en generel formel for volumenet af henholdsvis en *keglestub* og et *kuglesegment*. Kig på figurerne 2 og 3 nedenfor.

Figur 2



Figur 3



g) (*Keglestubben*) Bestem – udtrykt ved r, R og h – forskriften for den rette linje, som går igennem punkterne A og B på figur 2. Benyt herefter formlen for volumenet for et omdrejningslegeme til at vise, at keglestubben har et volumen givet ved følgende udtryk:

(1) $$V_{\text{keglestub}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

h) (*Kuglesegmentet*) Argumenter for, at forskriften for den øvre halvdel af cirklen med radius R på figur 3 er lig med $g(x)=\sqrt{R^2-x^2}$. Benyt nu igen formlen for volumenet for et omdrejningslegeme til at vise, at der gælder følgende formel for volumenet af kuglesegmentet:

(2) $$V_{\text{kuglesegment}} = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$$

Hvis man ikke ønsker at inddrage R men derimod r, kan man prøve at udnytte identiteten $R^2=r^2+(R-h)^2$ (Overvej!) til at udlede følgende formel for keglesegmentets volumen, udtrykt ved r og h:

(3) $$V_{\text{kuglesegment}} = \frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$$

i) Mulighed for yderligere studier: Prøv at designe en ballon med en anden form end den, der er omtalt i denne note. Prøv at beregne volumen .....

Projekt med varmluftsballon i fysik på Haderslev Katedralskole. Ballon udført at papirstrimler.