Om bilers bremseevne

I denne lille projektopgave skal vi se på bremselængden for en bil og studere den afstand man skal holde til en anden bil under kørsel for at være sikker på at kunne undgå sammenstød. Denne afstand undervurderes ofte af folk på vejene.

I den første del af opgaven betragter vi en enkelt bil med henblik på at bestemme dens bremselængde som funktion af hastigheden. Man kan regne med, at biler kan levere en konstant maksimal bremsekraft under nedbremsning, hvilket ifølge Newtons 2. lov betyder en konstant negativ acceleration (= deceleration) på lige vej. Det giver anledning til de velkendte bevægelsesligninger for bevægelser med konstant acceleration:

(1) $$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

(2) $$v = a \cdot t + v_0$$

(3) $$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

hvor t er tiden, s strækningen, v hastigheden og a er den konstante acceleration, mens s_0 er strækningen til tiden 0 og v_0 er hastigheden til tiden 0. Undertiden vil vi skrive $s(t)$ i stedet for s og $v(t)$ i stedet for v, for at fremhæve, at størrelserne er funktioner af tiden t. Bemærk at standardenhederne for s, v og a er henholdsvis m, m/s og m/s^2.

a) Ifølge færdselsloven skal biler som minimum kunne bremse på 6 m ved 30 km/t. Benyt formel (3) til at bestemme den (negative) acceleration, som det svarer til.

b) Find et udtryk for *bremselængden* s_{brems} som funktion af hastigheden v_0. Kan du bekræfte påstanden om at bremselængden vokser med kvadratet på afstanden som oplyst i teoribøgerne på kørerskolerne?

c) Lad os sige, at en bestemt bil kan bremse med en acceleration på $-7\ \text{m/s}^2$. Hvor stor er bremselængden, hvis bilens hastighed er 100 km/t? Altså den afstand bilen må tilbagelægge fra der bremses til bilen holder helt stille.

Der er imidlertid ofte et forhold, man skal tage højde for ved opbremsning: Hvis der er en ydre begivenhed, som man skal reagere på, så går der et lille stykke tid, *reaktionstiden* t_R, før man opfatter situationen og trykker på bremsepedalen. Den strækning, som man tilbagelægger indenfor reaktionstiden, kaldes *reaktionslængden* og betegnes s_R. Som en gennemsnitlig reaktionstid i trafikken regner man med 1,0 sek. Summen af bremselængden og reaktionslængden betegnes *standselængden*.

d) Bestem standselængden i situationen fra spørgsmål c), hvis reaktionstiden er 1 sek.

Vi betragter nu en ny situation, hvor en bil *A* kører bag ved en bil *B*. Færdselsloven foreskriver, at bil *A* skal holde så stor en afstand til bil *B*, så han kan nå at bremse ned, selv hvis bil *B* foretager en katastrofe-opbremsning. Et af de interessante spørgsmål er, hvor stor denne mindste afstand skal være? For at besvare dette spørgsmål og andre skal vi naturligvis kende data, herunder hastigheden samt accelerationen under nedbremsning. Da biler ofte har kørt et lille stykke tid lige bag hinanden, kan vi gå ud fra, at de har *samme hastighed*. Hvis der er tale om biler af samme type, fx personbiler, kan vi endvidere som en god tilnærmelse gå ud fra, at de har samme bremselængde og dermed samme acceleration under nedbremsning. I dag har biler af samme type på tværs af mærker nemlig så sammenlignelige data på dette punkt, at vi kan antage, at bilerne er ens. Hvis det ene af de to køretøjer er en personbil og det andet en lastbil, er situationen naturligvis en anden. Ovenstående antagelser vil blive forudsætninger i modellen vi arbejder med i det følgende.

Bil *A*: $t = 0$	Bil *B*: $t = 0$
$s_A = 0$	$s_B = s_0$
$v_A = v_0$	$v_B = v_0$

Vi starter "stopuret", når bil *B* bremser, hvilket vil sige $t = 0$. Til dette tidspunkt er den fælles hastighed for bilerne v_0, mens afstanden mellem bilerne er s_0. I det følgende vil indices *A* og *B* referere til henholdsvis bil *A* og bil *B*. I de tilfælde, hvor størrelserne er ens, vil vi udelade indices.

e) Benyt blandt andet formlen fra spørgsmål b) til at finde udtryk for standselængderne $s_{A,\text{stands}}$ og $s_{B,\text{stands}}$. Benyt dem til at vise følgende betingelse for at bil *A* kan bremse tidsnok: $v_0 \cdot t_R < s_0$. Kan du argumentere for denne betingelse med ord uden brug af formler?

f) Hvor stor afstand skal man holde på motorvejen, hvis bilen har hastigheden 110 km/t og reaktionstiden er 1 sek?

g) Forsøg at udled formlerne (1), (2) og (3), idet du blot udnytter at bevægelsen har en konstant acceleration og herefter regner baglæns til hastighed og bevægelse via stamfunktioner …

Eksempel 1

Lad os forestille os en situation, hvor $t_R = 1{,}0$ sek, $v_0 = 32$ m/s, $s_0 = 20$ m, $a = -8\text{ m/s}^2$. Bevægelsen for bil *B* kan opdeles i to tidsintervaller: Det første, hvor bilen bremser op og det andet, hvor bilen holder stille. I førstnævnte fås direkte af (1):

$$s_B(t) \;=\; \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot(-8)\cdot t^2 + 32\cdot t + 20 \;=\; -4t^2 + 32t + 20$$

som er gældende indtil bilen holder stille, hvilket afgøres ved hjælp af (2):

$$v = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = a\cdot t + v_0 \;\Leftrightarrow\; t = -v_0/a = -32/(-8) = 4$$

Efter 4 sek holder bilen stille i afstanden 84 m, som det ses af:

$$s_B(4) = -4\cdot 4^2 + 32\cdot 4 + 20 = 84$$

Heraf fås følgende gaffelforskrift for bevægelsen for bil *B*:

$$s_B(t) \;=\; \begin{cases} -4t^2 + 32t + 20 & \text{for } \; 0 \le t \le 4 \\ 84 & \text{for } \; t > 4 \end{cases}$$

På tilsvarende måde er bevægelsen for bil *B* opdelt i tre tidsintervaller: I det første har bil *A* ikke opdaget bil *B*'s opbremsning og kører derfor med konstant hastighed v_0. Bevægelsen er derfor givet ved $s_A(t) = v_0\cdot t = 32t$ indenfor reaktionstidsrummet fra 0 til 1 sek. I det andet tidsinterval bremser bil *A* op indtil den kommer til at holde helt stille i det tredje tidsinterval. Under nedbremsningen haves en bevægelse med konstant acceleration, dvs. $s_A(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_1 t + s_1$ ifølge (1). Det giver hastigheden $v_A(t) = at + v_1$. Da bevægelsesfunktionen er kontinuert og differentiabel i $t = 1$, fås

$$v_A(1) = 32 \;\Leftrightarrow\; (-8)\cdot 1 + v_1 = 32 \;\Leftrightarrow\; v_1 = 40$$
$$s_A(1) = 32\cdot 1 = 32 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}\cdot(-8)\cdot 1^2 + 40\cdot 1 + s_1 = 32 \;\Leftrightarrow\; s_1 = -4$$

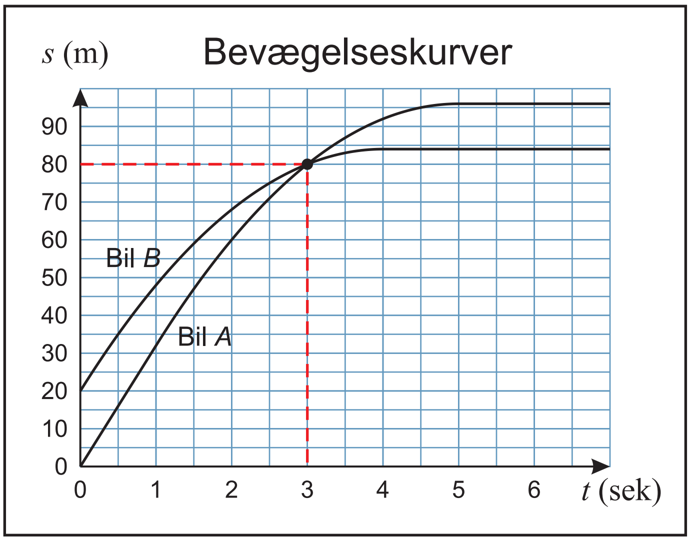
Altså er $s_A(t) = -4t^2 + 40t - 4$ i intervallet fra 1 sek. til 5 sek. Bemærk, at bil *A* tager lige så lang tid om at bremse op som bil *B*, i dette tilfælde 4 sek. Endelig fås bevægelsen i det sidste tidsinterval, idet funktionen skal være kontinuert i $t = 5$:

$$s_A(5) = -4\cdot 5^2 + 40\cdot 5 - 4 = 96$$

Sammenlagt giver det følgende gaffelforskrift:

$$s_A(t) \;=\; \begin{cases} 32t & \text{for } \; 0 \le t \le 1 \\ -4t^2 + 40t - 4 & \text{for } \; 1 < t \le 5 \\ 96 & \text{for } \; 5 < t \end{cases}$$

Graferne for $s_A(t)$ og $s_B(t)$ er afbildet på næste side.



Det fremgår, at bil A rammer bil B til tidspunktet 3,0 sekunder, og på dette tidspunkt har bil A tilbagelagt en strækning på 80 m.

Bemærkning

På TI-89 Titanium grafregneren kan man indtaste en gaffelforskrift ved at anbringe to when-sætninger inde i hinanden:

$$f(t) = \begin{cases} udtryk1 & \text{for } betingelse1 \\ udtryk2 & \text{for } betingelse2 \end{cases}$$

`when(`*betingelse1*`,`*udtryk1*`,when(`*betingelse2*`,`*udtryk2*`,undef))`

h) Nedenfor er der en række tilfælde med forskellig data. Afgør i hvert enkelt tilfælde, om bil A rammer bil B eller ej. Hvis der sker et sammenstød, benyt da grafregneren til at bestemme tidspunktet for dette, samt hvor langt bil A kører før sammenstødet forekommer og afgør også om sammenstødet foregår før bil A når at opdage noget, mens begge bremser op eller når bil B holder stille.

h1) $t_R = 1{,}2$ sek, $v_0 = 30$ m/s, $s_0 = 16$ m, $a = -8$ m/s^2 .

h2) $t_R = 1{,}0$ sek, $v_0 = 27$ m/s, $s_0 = 32$ m, $a = -9$ m/s^2 .

h3) $t_R = 1{,}0$ sek, $v_0 = 35$ m/s, $s_0 = 32$ m, $a = -9$ m/s^2

h4) $t_R = 1{,}0$ sek, $v_0 = 35$ m/s, $s_0 = 3$ m, $a = -9$ m/s^2