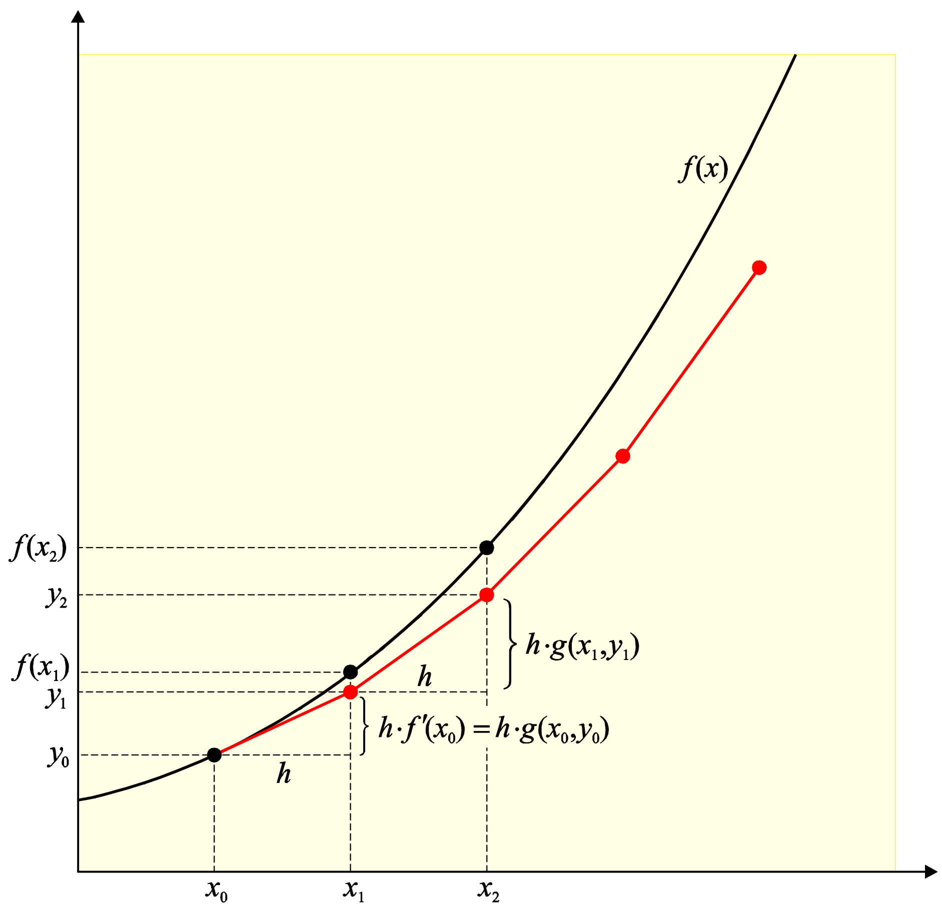
Eulers metode

- Numerisk løsning af differentialligninger

Der findes en omfattende teori for differentialligninger. Det er imidlertid langt fra alle differentialligninger, man kan angive en eksakt løsning til. I mange tilfælde må man ty til *numeriske løsningsmetoder*, som kan give en tilnærmet løsning. Vi skal se på den simpleste metode i denne projektopgave, nemlig den såkaldte *Eulers metode*, opkaldt efter en stor schweizisk matematiker *Leonhard Euler* (1707-1783). Lad der være givet en differentialligning af 1. orden på formen:

(1) $$y' = g(x, y)$$

En vigtig sætning i teorien siger, at hvis funktionen på højre side i (1) har nogle tilstrækkeligt pæne egenskaber, som vi ikke vil komme ind på her, så findes der en entydig bestemt løsning til (1), hvis graf går igennem et givet punkt (x_0, y_0) i *xy*-planen. Eller sagt på en anden måde: Der findes netop én løsning $y = f(x)$ til differentialligningen (1) med *randbetingelsen* $f(x_0) = y_0$. I det følgende vil vi finde en tilnærmet løsning til netop dette problem. Betragt figuren herunder.



Vi starter i det punkt, som randbetingelsen angiver: $f(x_0) = y_0$. Den entydige løsning betegnet $f(x)$, hvis graf går igennem dette punkt, er indtegnet. Vores opgave er at finde tilnærmede værdier $y_1, y_2, y_3, \ldots$ for funktionsværdierne $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ i x-værdier i skridt på h fra x_0: $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h, \ldots$ Det er oplagt at benytte tangenten i x_0 i processen med at finde approksimationen til $f(x_1)$. Ifølge figuren får vi følgende y-værdi ved at indsætte x_1 i tangentens forskrift:

(2) $$y_1 = y_0 + h \cdot f'(x_0) = y_0 + h \cdot g(x_0, y_0)$$

hvor vi i sidste lighedstegn har udnyttet, at $y = f(x)$ er løsning til (1). For at komme videre til den tilnærmede værdi for næste funktionsværdi, kan vi ikke mere gøre brug af en tangent til grafen, for udgangspunktet (x_1, y_1) ligger ikke på grafen for *f*. Imidlertid vil der ifølge teorien være en løsning til (1), hvis løsningskurve går gennem (x_1, y_1), og så kan vi benytte denne kurves tangent i (x_1, y_1). Denne kurves tangent vil i $x = x_1$ ifølge (1) have hældningen $g(x_1, y_1)$. Dette fører til den næste y-værdi:

(3) $$y_2 = y_1 + h \cdot g(x_1, y_1)$$

Vores antagelse er, at denne nye løsningskurve ligger tæt på grafen for *f* og at y_2 derfor vil være tæt på $f(x_2)$. Sådan fortsættes og vi får følgende algoritme:

(4) $$y_{n+1} = y_n + h \cdot g(x_n, y_n) \quad (\textit{Eulers metode})$$

hvor $x_n = x_0 + n \cdot h$.

Eksempel

Givet følgende differentialligning:

$$y' \;=\; 5 \cdot \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + 1)$$

Vi søger den løsning, som har randbetingelsen $f(0) = 2000$, og vil vil benytte Eulers metode til at finde tilnærmede funktionsværdier for løsningen. Ifølge (4) giver det i det konkrete tilfælde rekursionsformlen

$$y_{n+1} \;=\; y_n \;+\; h \cdot 5 \cdot \sqrt{y_n} \cdot \left(\sqrt{x_n} + 1\right)$$

og ved indsættelse af tal:

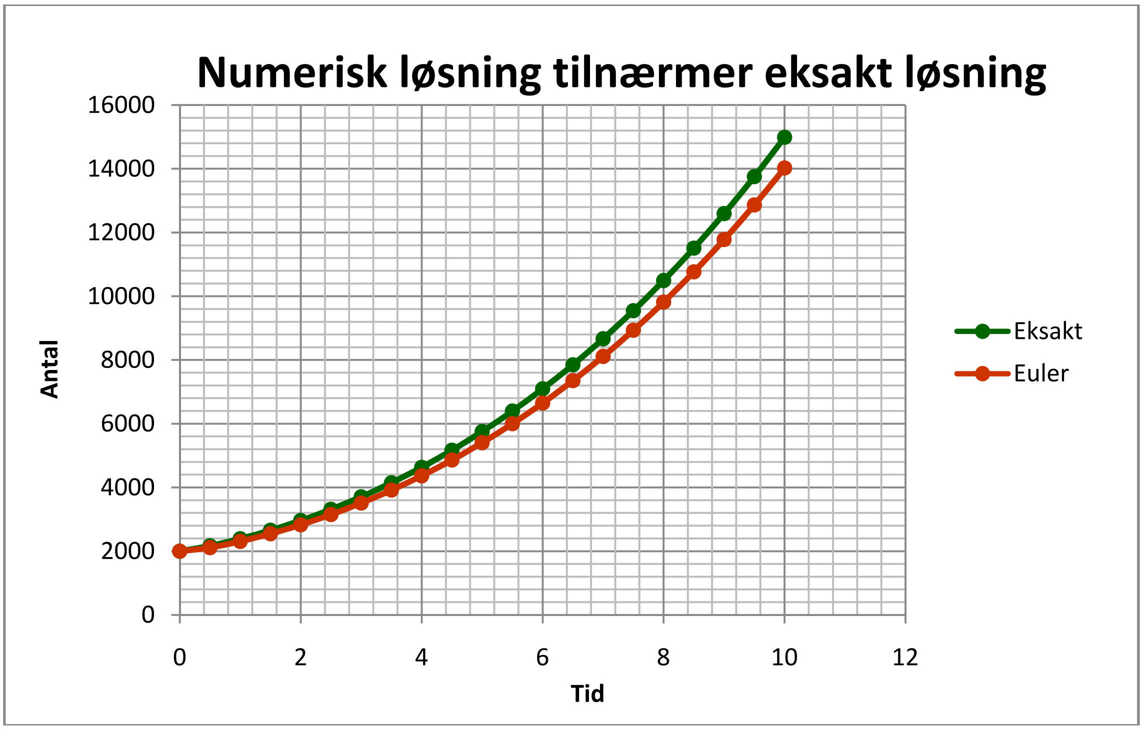
$$x_0 = 0,\;\; y_0 = 2000 \quad \mapsto \quad y_1 = 2000 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2000} \cdot (\sqrt{0} + 1) = 2111{,}8$$
$$x_1 = 0{,}5;\;\; y_1 = 2111{,}8 \quad \mapsto \quad y_2 = 2111{,}8 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2111{,}8} \cdot (\sqrt{0{,}5} + 1) = 2307{,}9$$
$$x_2 = 1{,}0;\;\; y_2 = 2307{,}9 \quad \mapsto \quad y_3 = 2307{,}9 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2307{,}9} \cdot (\sqrt{1{,}0} + 1) = 2548{,}1$$
$\ldots$

Det er nærliggende at benytte Microsoft Excel eller et lignende program til at foretage beregningerne. I dette tilfælde har vi valgt en opgave, hvor vi kan finde den eksakte løsning også, for at kunne sammenligne og studere den begående fejl.

Den eksakte løsning, hvis graf passerer igennem (0,2000) viser sig at være givet ved:

$$y = \left(\tfrac{5}{3}x^{3/2} + \tfrac{5}{2}x + 44,7214\right)^2$$

Figuren nedenfor illustrerer hvor godt den tilnærmede løsning stemmer overens med den eksakte. Man kan vise, at Eulers metode er *konvergent*, hvormed løst sagt menes, at hvis man gør skridtlængden *h* mindre, så vil de numerisk bestemte værdier nærme sig til de eksakte. Konvergensen er dog ikke overvældende hurtig, og der findes andre metoder, som er væsentligt hurtigere. De er dog også noget mere komplicerede at forstå og at anvende.



Opgave

I det følgende skal du benytte Eulers metode til at bestemme tilnærmede værdier for den løsning til den *logistiske* differentialligning $y' = 0,02y(100-y)$, som tilfredsstiller følgende randbetingelse: $f(0) = 20$. Du skal benytte Excel.

a) Bestem et udtryk for den eksakte løsning til problemet.

b) Benyt (4) til at opstille en rekursionsformel for at kunne bruge Eulers metode.

c) Benyt først skridtlængde på 0,2 og brug Excel til at udregne alle de tilnærmede funktionsværdier fra $x = 0$ til $x = 4$ i skridt på 0,2. Bestem den største afvigelse af disse værdier i forhold til de korrekte. Lad et diagram i Excel, som viser den tilnærmede og den eksakte graf på samme tid.

d) Gentag c) med skridtlængden 0,1.

e) Med hvor stor en faktor er den maksimale fejl i intervallet $[0,4]$ faldet, ved at gå fra 0,2 til 0,1 i skridtlængde?