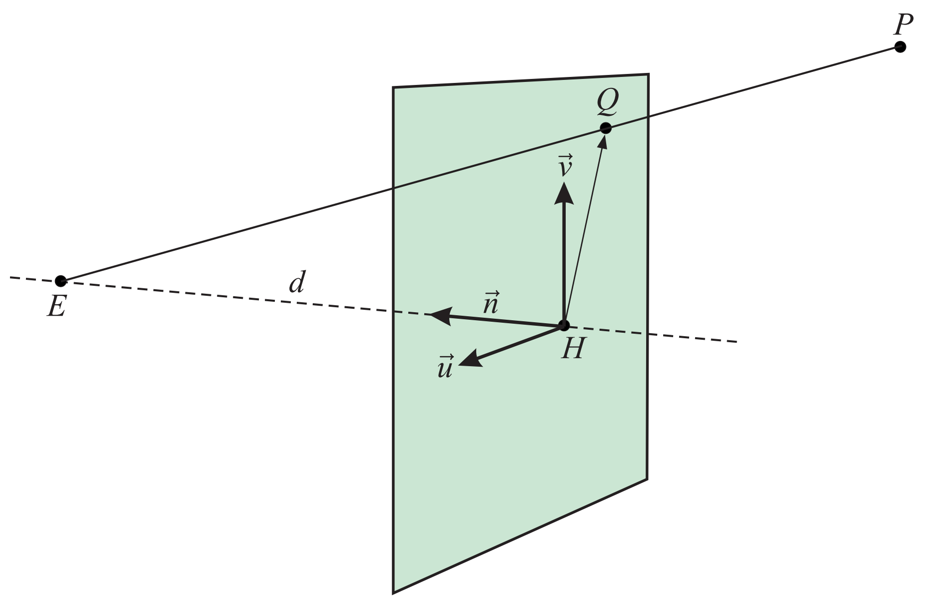
Generel perspektivisk afbildning

I en del præsentationer af perspektivtegning bruger man langt den meste plads på tilfældet med *lodret* billedplan, og omtaler kun kort afvigelser herfra i form af frø- og fugleperspektiv. Det er der også meget fornuft i, da langt de fleste tegninger og malerier er frembragt med lodret billedplan. I denne projektopgave skal du imidlertid betragte en mere generel situation, hvor billedplanen er anbragt helt vilkårligt, en situation, som kan være relevant i visse computerspil, hvor spilleren flyver rundt i et tredimensionelt univers. Til løsning af opgaven skal du benytte rumgeometri.

I det følgende har vi givet et *øjepunkt* E og en billedplan i afstanden d fra øjepunktet. Billedplanen er specificeret ved et punkt i planen og en normalvektor $\vec{n}$ med længde 1. Med *synsretningen* vil vi mene en vektor $\vec{w}$ ensrettet med vektoren $-\vec{n}$. Der skal ikke lægges noget specielt i dette udtryk, idet man jo ikke kan tale om at øjet kigger i en bestemt retning. Det er dog hensigtsmæssigt at kunne bruge udtrykket, fordi synsretningen angiver retningen vinkelret på billedplanen. Linjen gennem øjepunktet E med retningsvektor $\vec{n}$ skærer billedplanen i et punkt H, som kaldes for *hovedpunktet*. H er altså det punkt i billedplanen, som ligger "lige ud for" øjepunktet! For at kunne afbilde det perspektiviske billede af et motiv i billedplanen er det nødvendigt, at vi har et koordinatsystem i billedplanen. Her vil vi antage, at vi har to enhedsvektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$, som er ortogonale og som udspænder billedplanen, og hovedpunktet H, som er koordinatsystemets begyndelsespunkt. Et generelt punkt P ønskes afbildet i billedplanen. Opgaven er at bestemme koordinaterne til billedpunktet Q i forhold til koordinatsystemet $(H, \vec{u}, \vec{v})$ i billedplanen.

Figur 1



a) Vis, at der må findes et $t \in R$, så $\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HE} + t \cdot \overrightarrow{EP} = d \cdot \vec{n} + t \cdot \overrightarrow{EP}$.

Lad os betegne koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{HQ}$ i forhold til det rumlige koordinatsystem $(H,\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ med Q_u, Q_v og Q_n: $\overrightarrow{HQ} = Q_u \cdot \vec{u} + Q_v \cdot \vec{v} + Q_n \cdot \vec{n}$.

b) Argumenter for, at koordinaterne kan findes ved skalarprodukterne:

$$Q_u = \overrightarrow{HQ} \bullet \vec{u}, \quad Q_v = \overrightarrow{HQ} \bullet \vec{v}, \quad Q_n = \overrightarrow{HQ} \bullet \vec{n}$$

c) Argumenter for, at betingelsen for, at Q ligger i billedplanen er, at $Q_n = 0$. Benyt det til at vise, at t-værdien omtalt i a) er givet ved:

$$t = -\frac{d}{\overrightarrow{EP} \bullet \vec{n}}$$

d) Benyt t-værdien i c) til at vise, at billedkoordinaterne Q_u og Q_v er givet ved:

$$Q_u = -d \cdot \left[\frac{\overrightarrow{EP} \bullet \vec{u}}{\overrightarrow{EP} \bullet \vec{n}} \right]$$

$$Q_v = -d \cdot \left[\frac{\overrightarrow{EP} \bullet \vec{v}}{\overrightarrow{EP} \bullet \vec{n}} \right]$$

e) Vis, at det giver følgende koordinater for billedkoordinaterne:

$$Q_u = -d \cdot \left[\frac{u_x(P_x - E_x) + u_y(P_y - E_y) + u_z(P_z - E_z)}{n_x(P_x - E_x) + n_y(P_y - E_y) + n_z(P_z - E_z)} \right]$$

$$Q_v = -d \cdot \left[\frac{v_x(P_x - E_x) + v_y(P_y - E_y) + v_z(P_z - E_z)}{n_x(P_x - E_x) + n_y(P_y - E_y) + n_z(P_z - E_z)} \right]$$

f) I det følgende skal du løse en konkret talopgave med disse oplysninger:

Øjepunktets koordinater er: $\overrightarrow{OE} = (5,-2,3)$
Synsretningen er givet ved $\vec{w} = (3,5,1)$
Punktet, der skal afbildes, er: $P(18,12,8)$
Enhedsvektoren $\vec{v}$ er givet ved: $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,0,3)$
Distancen i billedet er givet ved: $d = 10$

Bestem billedpunktets koordinater i $(H,\vec{u},\vec{v})$.
Bestem desuden hovedpunktet *H's* koordinater.

Hjælp: Udregn normalvektoren som $\vec{n} = -\vec{w}/|\vec{w}|$ og vektoren $\vec{u}$ som $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{n}$.

Bemærkninger

På figuren nedenfor er afbildet et kamera i øjepunktet E. På en måde er det misvisende at anvende et kamera, da det jo har sit eget billedplan i form af et negativ, hvis kameraet er analogt, eller i form af en billedsensor (fx CCD eller CMOS), hvis kameraet er digitalt. Meningen er imidlertid at illustrere, at synssituationen er fuldt beskrevet ved fire størrelser: Øjepunktets placering, synsretningen, vektoren $\vec{v}$, samt distancen d. Vektoren $\vec{v}$ fortæller, hvad, der er *op* for betragteren – kameraet kan eventuelt være tiltet! Det er ofte i praktisk uhensigtsmæssigt at være nødsaget til at finde en vektor $\vec{v}$, som er ortogonal på $\vec{n}$. Undertiden vil det være praktisk blot at angive en eller anden vektor i det plan, som er lodret for beskueren, en såkaldt *wiew-up* vektor $\vec{v}_{\text{up}}$, som vist på figuren. Herefter kan de resterende enhedsvektorer findes ved

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_{\text{up}} \times \vec{n}}{\left|\vec{v}_{\text{up}} \times \vec{n}\right|}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$$