Model af halvkugle

I dette projekt skal du konstruere en halvkugle i papir, for eksempel papir fra en restrulle fra et avistrykkeri, eller store papir ark fra billedkunst! Halvkuglen skal sammensættes af 12 strimler, som løber fra top til bund af halvkuglen. Du skal foretage matematiske beregninger for at bestemme formen på en strimmel. Idéen i denne øvelse kan udvides til at beregne formen for strimler til en ballon. Se linket til noten *Varmluftsballon*, som beskriver et projekt i fysik udført på Haderslev Katedralskole.

Betragt figur 1 på næste side: Her er halvkuglen med radius R projiceret ned i et vandret plan – groft sagt kan man kalde det situationen set oppefra. Der er foretaget 6 lodrette snit i halvkuglen, resulterende i 12 strimler.

a) Find formler for volumenet og overfladearealet af en halvkugle med radius 0,5m.

b) Hvad er længden af en strimmel, hvis $R = 0{,}5\,\mathrm{m}$?

c) Lad os se på et eksempel: Antag som ovenfor, at $R = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Lad $s = 0{,}3\,\mathrm{m}$. Bestem da den vinkel, regnet i *radianer*, som storcirkelbuen $\overset{\frown}{TP}$ spænder over, altså udregn $\angle TOP$ i radianer. *Hjælp*: Det vil i den forbindelse være hensigtsmæssigt at se på hvad der sker i planen *OTQ*, som er afbildet på figur 3 . Desuden skal du tænke på selve definitionen af begrebet radianer.

d) Betragt figur 2. Her er afbildet en *lillecirkel*, som skærer strimlen stykket $s = 0{,}3\,\mathrm{m}$ nede af strimlen. Hvad er radius $h(s)$ i denne cirkel? *Hjælp*: Kig på figur 3 og udnyt, at du kender $\angle TOP$ fra spørgsmål c).

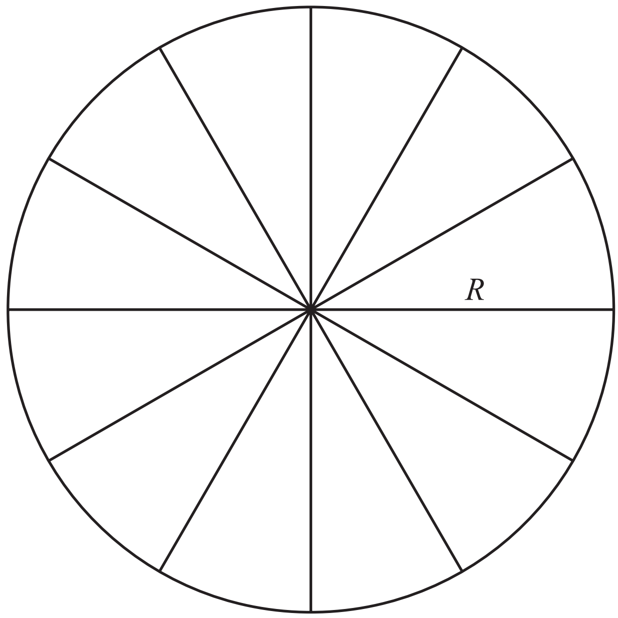
e) Bestem omkredsen $O(s)$ af lillecirklen, som skærer strimlen stykket $s = 0{,}3\,\mathrm{m}$ nede af denne. Hvor stor en del udgør stykket $b(s)$ af hele omkredsen $O(s)$. Brug det til at bestemme $b(s)$.

f) Prøv at producere en formel for $b(s)$ som funktion af s ved at gentage hvad du gjorde i punkterne c) - e), nu bare med variable s og R i stedet for konkrete værdier for disse. Måske kan du også generalisere til ikke bare 12 strimler, men til generelt n strimler?

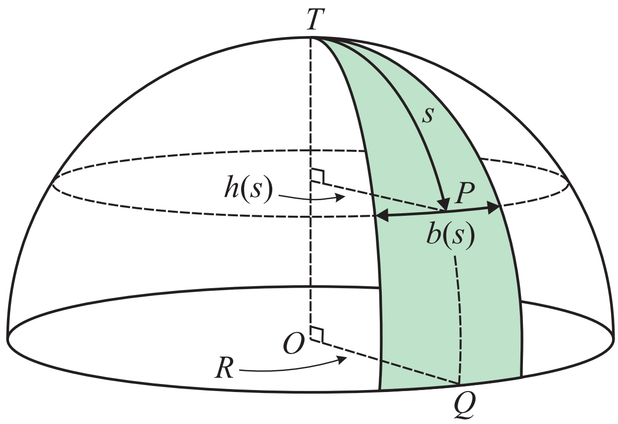
En cylinder og en kegle kan laves af et stykke papir, som man ruller sammen (overvej!). Den store tyske matematiker *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) beviste i en berømt sætning (*Theorema Egregium*), at den såkaldte *Gauss-krumning* for en flade er bevaret under lokale isometrier, og dermed også under (globale) isometrier. En ”udfoldning” af en flade i en plan kræver en isometri, dvs. en afbildning, som er afstands-, vinkel- og arealbevarende. Da imidlertid Gauss-krumningen for en kugle og en plan er henholdsvis R^2 og 0, så kan man konkludere, at en kugle ikke kan foldes ud. Dette gælder også en nok så lille del af en kugle. Derfor er der principielt noget galt i vores konstruktion ovenfor. Tilnærmelsen af halvkuglen med strimler er dog rigtig god, især hvis man benytter mange strimler.

g) Prøv at argumentere for, hvor vi ovenfor har foretaget nogle ”simplifikationer”.

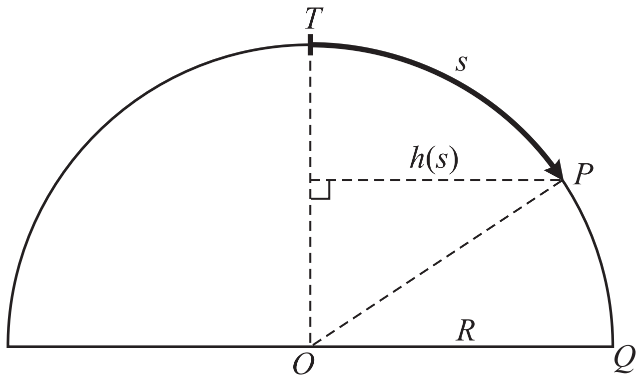
Figur 1
Projektion på vandret plan



Figur 2
Halvkugle med strimmel



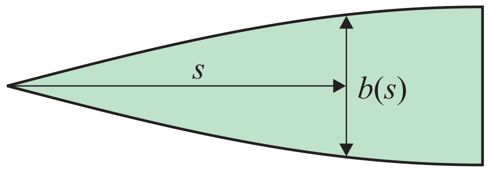
Figur 3
Snit med plan gennem OTP



Praktisk udførelse af halvkugle

Slut af med i praksis at lave en halvkugle af papir, for eksempel med radius $R = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Ved udførelsen vil det være fornuftigt at folde et stykke papir sammen på midten og afsætte den halve bredde plus en limkant Δb fra midten af denne, som vist på den anden figur nedenfor: $f(s) = \frac{1}{2}b(s) + \Delta b$. Et udtryk for bredden $b(s)$ som funktion af s kendes fra punkt f), hvorved et udtryk for $f(s)$ kan findes. Benyt for eksempel et regneark til at få udregnet $f(s)$ for en række værdier af s. Derefter er det bare at komme i gang med papir og klister!

Figur 4
En strimmel



Figur 5
Den halve bredde + limkant