Det skrå kast - med luftmodstand

Billeder:

Forside: Bearbejdet billede af ©iStock.com/nico_blue
Side 6: ©iStock.com/brett lamb
Desuden egne illustrationer.

1. Indledning

Denne note kan danne udgangspunkt for et 3g-projekt i matematik og fysik med emnet *det skrå kast med luftmodstand* eller som et oplæg til et studieretningsprojekt. Noten er udformet, så læseren selv skal udfylde detaljer gennem løsning af opgaver.

For det skrå kast *uden luftmodstand* er stedfunktionen som bekendt givet ved følgende udtryk, hvor det antages, at $x(0) = y(0) = 0$ og at genstanden starter i punktet (0,0) til tiden $t = 0$ samt at hastighedsvektoren har størrelsen v_0 og danner en vinkel på α i forhold til x-aksen:

(1)
$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) &= -\tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{aligned}$$

Formlerne er standard i gymnasiet og vi vil ikke udlede dem her. Når der regnes med en luftmodstand bliver situationen en del sværere og mere broget. For det første bliver der kun tale om tilnærmede modeller og så bør man endda benytte forskellige modeller i forskellige situationer. En indikator for, hvornår man bør anvende hvilken model er det såkaldte *Reynolds tal* (Reynolds number):

(2)
$$\mathrm{Re} = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

hvor ρ er densiteten af det medium, genstanden bevæger sig igennem, η er mediets *dynamiske viskositet* (dynamic viscosity), v er hastigheden af genstanden i forhold til mediet og L er en karakteristisk længde for objektet, for eksempel diameteren i tilfældet med en kugle.

Eksempel 1

Lad os sige, at vi har at gøre med en tennisbold, som sendes af sted med en hastighed af 35 m/s. Mediet er luft med en dynamisk viskositet på $1,8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}$. Densiteten af atmosfærisk luft ved stuetemperatur er 1,204 kg/m^3. En tennisbold har en diameter omkring 6,5 cm. Dermed fås den dimensionsløse størrelse:

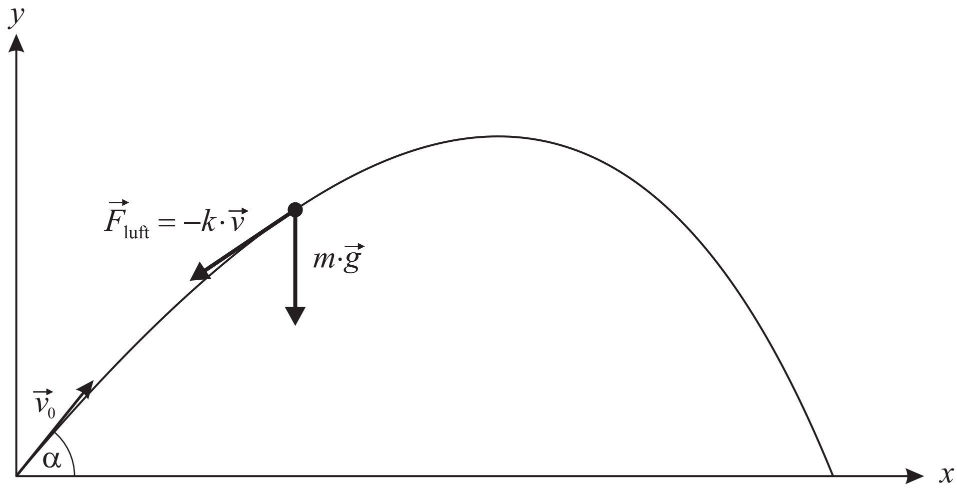
(3)
$$\mathrm{Re} = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta} = \frac{0,065\,\mathrm{m} \cdot 1,204\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 35\,\mathrm{m/s}}{1,8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}} = 152200$$

□

Erfaringer har vist, at hvis $\mathrm{Re} < 1$, så er det en god model at antage at luftmodstanden er *proportional med hastigheden*. Hvis derimod $1000 < \mathrm{Re} < 300000$, så er det en bedre model at antage at luftmodstanden er modsat rettet hastigheden og proportional med *kvadratet på farten*. For Reynoldstal imellem 1 og 1000 er situationen en mellemting. Hvis Reynoldstallet er lille, så er flowet rundt om genstanden *laminær* (laminar), hvilket betyder, at der ikke dannes hvirvler. Hvis derimod Reynoldstallet er stort, så er flowet *turbulent*. Hvis Reynoldstallet skal være mindre end 1, så skal genstanden enten befinde sig i en væske med ret stor viskositet eller også skal genstanden være yderst lille og ikke have for stor hastighed. Dette vil sjældent være tilfældet for bevægelse i atmosfærisk luft. Alligevel vil vi starte med at betragte dette tilfælde, da problemet forholdsvist nemt lader sig løse matematisk. Læseren opfordres til at løse opgaverne undervejs. Der forudsættes kendskab til den indledende teori for differentialligninger af første orden.

2. Hastighedsproportional luftmodstand - model 1

I dette afsnit skal vi undersøge tilfældet hvor luftmodstanden er proportional med hastighedsvektoren. Nærmere bestemt er luftmodstanden en kraftvektor, som er modsat rettet bevægelsen, altså modsat rettet hastighedsvektoren $\vec{v}$, og størrelsen er proportional med genstandens fart v.



Opgave 2

Benyt fysiske argumenter, herunder Newtons 2. lov, til at argumentere for at genstanden skal tilfredsstille følgende differentialligning:

(4) $$m \cdot \vec{v}\,' = m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{v}$$

eller skrevet ud i koordinater $\vec{v} = (v_x, v_y)$:

(5a) $$(v_x)' = -\frac{k}{m} \cdot v_x$$

(5b) $$(v_y)' = -\frac{k}{m} \cdot v_y - g$$

Vis desuden, at hvis genstanden til tiden $t = 0$ befinder sig i (0,0) og hastighedsvektoren til samme tidspunkt danner vinklen α med x-aksen, så har vi følgende *randbetingelser*, hvor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ er genstandens stedvektor:

(6) $$x(0) = y(0) = 0$$

(7) $$v_x(0) = v_0 \cdot \cos(\alpha), \quad v_y(0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

Opgave 3

I denne opgave vil du blive ledt frem til en løsning til det differentialligningssystem, der blev opstillet i opgave 2.

a) Bemærk først, at differentialligningerne (5a) og (5b) begge er af velkendte standardtyper! Benyt din viden om løsningerne til disse typer til at vise, at løsningerne til (5a) og (5b) er på følgende form, hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter:

$$\begin{aligned} v_x &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} \\ v_y &= c_2 \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \end{aligned}$$

b) Benyt randbetingelserne (6) til at finde de arbitrære konstanter. Vis at

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} \\ v_y &= \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \end{aligned}$$

c) Nu har du bestemt hastighedskoordinaterne. For at bestemme stedkoordinaterne skal du integrere. Vis, at stedkoordinaterne er på følgende form, hvor c_3 og c_4 er arbitrære konstanter:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{m}{k} \cdot v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} + c_3 \\ y(t) &= -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + c_4 \end{aligned}$$

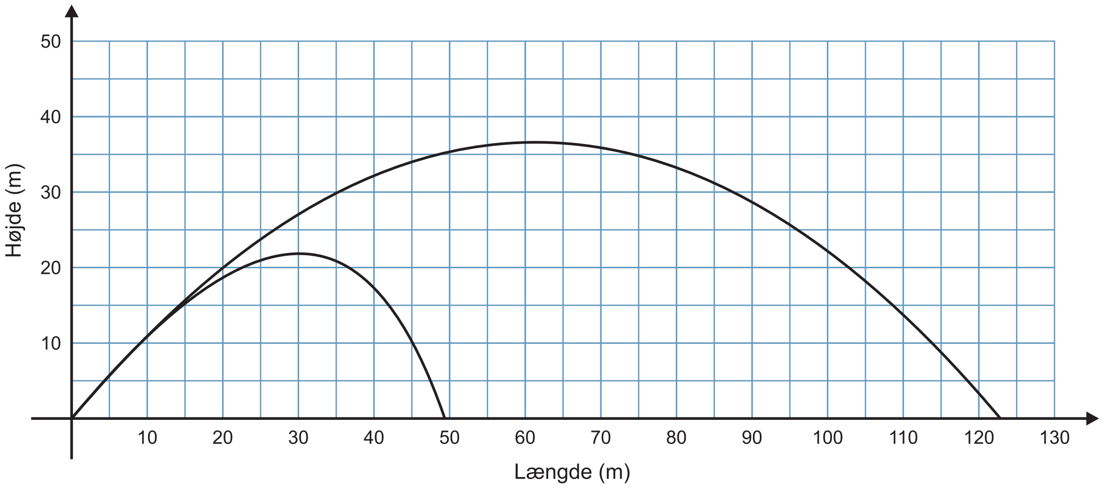
d) Benyt randbetingelserne (6) til at vise at:

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{m}{k} \cdot v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ c_4 &= \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k} \right) \end{aligned}$$

e) Indsæt værdierne for de arbitrære konstanter fra d) og omskriv stedkoordinaterne fra c) til følgende udtryk:

$$\text{(9)} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m v_0 \cos(\alpha)}{k} \left(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t}\right) \\ \dfrac{m}{k} \left(v_0 \sin(\alpha) + \dfrac{mg}{k} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t}\right) - \dfrac{mg}{k} \cdot t \end{pmatrix}$$

Med resultatet i (9) har vi løst bevægelsesproblemet. På næste side er afbildet banekurven for en tennisbold med masse $m = 0,0575\ \mathrm{kg}$, begyndelsesfart $v_0 = 35\ \mathrm{m/s}$ og startvinkel $\alpha = 50°$. Luftmodstandsparameteren er $k = 0,0165\ \mathrm{N/(m/s)}$ og $g = 9,82\ \mathrm{m/s^2}$. Banekurven er sammenlignet med den, man ville få, hvis der ikke var nogen luftmodstand. Som nævnt er denne model ikke optimal i den givne situation, da Reynoldstallet er for stort. Vi skal dog senere se, at kurven ikke er så langt fra den kurve man ville få ved at benytte den mere korrekte model, som vi skal se på i næste afsnit.



3. Hastighedskvadratisk luftmodstand - model 2

Ifølge afsnit 1 er det for langt de fleste kast i atmosfærisk luft mere nøjagtigt at benytte model 2, hvor luftmodstanden antages modsat rettet bevægelsen og i størrelse er proportional med *kvadratet på farten*.

Opgave 4

Argumenter for, at vi i model 2 for det skrå kast skal løse følgende differentialligning, hvor D er en konstant:

(10) $$m \cdot \vec{v}\,' = m \cdot \vec{g} - D \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

og skrevet ud i koordinater:

(11) $$\begin{aligned} m \cdot v_x' &= -D \cdot \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right) \cdot v_x \\ m \cdot v_y' &= -m \cdot g - D \cdot \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right) \cdot v_y \end{aligned}$$

□

Det viser sig, at den samlede modstandskoefficient D afhænger af mediets densitet ρ, tværsnitsarealet A vinkelret på genstandens bevægelse samt genstandens form og overfladefriktion. De to sidstnævnte er indeholdt i den såkaldte *Drag Coefficient*, C_d. Man har fundet følgende udtryk for den samlede modstandskoefficient D:

(12) $$D = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot A$$

Eksempel 5

Lad os bestemme den samlede modstandskoefficient for en tennisbold, som bevæger sig i atmosfærisk luft ved en temperatur på 20°C. En tennisbold har typisk en diameter på 6,5 cm. Dermed kan vi bestemme det areal, som vender op mod bevægelsesretningen:

$A = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(0,065\,\text{m})^2 = 0,003318\,\text{m}^2$. Luftens massefylde ved 20°C er på 1,204 kg/m^3. Drag koefficienten for en tennisbold er typisk 0,5-0,6. Vi sætter den til 0,51. Det giver følgende værdi for tennisboldens samlede modstandskoefficient:

$$D \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot C_\text{d}\cdot A \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot 1,204\,\text{kg/m}^3\cdot 0,51\cdot 0,0\,\text{m}^2 \;=\; 0,001019\,\text{kg/m}$$

□

Differentialligningssystemet (11) er desværre ikke af en simpel natur. For det første er systemet *koblet*, hvormed menes at de to ukendte funktioner, v_x og v_y, som vi ønsker at bestemme, figurerer i begge ligninger. Man kan dermed ikke løse ligningerne hver for sig, undtagen i specialtilfælde. Desuden er differentialligningssystemet ikke *lineært*, hvilket betyder at den omfattende teori, man kender omhandlede lineære differentialligninger, ikke kan anvendes. Ovenstående betyder, at vi ikke kan finde løsninger i form af færdige funktionsudtryk. Vi må nøjes med at bestemme tilnærmede funktionsværdier for løsningerne i en række punkter ved hjælp af såkaldte *numeriske metoder*. Før vi gør det, skal vi dog i opgave 6 se på et specieltilfælde, hvor det lader sig gøre at bestemme en løsnings på funktionsform. Opgaven er ikke helt nem og kræver kendskab til den løsningsmetode, som går under navnet *separation-af-variable-metoden*.

Opgave 6 (Det frie fald med luftmodstand)

I tilfældet med det frie fald bliver problemet 1-dimensionalt. Vi kan nøjes med at regne med en y-koordinat, som afhænger at tiden t.

a) Lav en tegning af situationen, hvor du tegner kraftpile på genstanden. Argumenter for at vi skal løse følgende differentialligning:

(13) $$m\cdot v' \;=\; -m\cdot g \;+\; D\cdot v^2$$

b) Indfør for overskuelighedens skyld en størrelse k givet ved $k = \sqrt{m\cdot g/D}$ og vis, at ligningen (13) kan omskrives til:

(14) $$v' \;=\; \frac{D}{m}\cdot(v^2 - k^2)$$

Konstater ved separation af variable, at vi skal løse følgende ligning:

(15) $$\int\left(\frac{1}{v^2 \;-\; k^2}\right)\cdot dv \;=\; \int\frac{D}{m}\cdot dt$$

c) For at kunne bestemme integralet på venstre side i (15) er det en stor fordel at *dekomponere* integranden i *partialbrøker* (Partial-Fraction Decomposition) før man foretager integrationen. Vis at

(16) $$\frac{1}{v^2 - k^2} \;=\; \frac{\frac{1}{2k}}{v-k} \;-\; \frac{\frac{1}{2k}}{v+k}$$

d) Vis at integrationen af (15) fører til følgende ligning:

(17) $$\ln|v-k| - \ln|v+k| \;=\; 2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t \;+\; c \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left|\frac{v-k}{v+k}\right| \;=\; 2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t \;+\; c$$

hvor c er en arbitrær konstant.

e) Lad os vedtage, at genstanden slippes til tidspunktet $t=0$. Vis at i dette tilfælde skal hastighedsløsningen v (til 17) opfylde:

(18) $$-\frac{v-k}{v+k} = e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

NB! Husk at du kun betragter den løsning, som går igennem punktet $(t,v)=(0,0)$.

f) Isoler v i (18) og vis at man får følgende:

(19) $$v = k\cdot\left(\frac{1-e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{1+e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right) = -k\cdot\left(\frac{e^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}-e^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{e^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}+e^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right) = -\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}\cdot\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}-e^{-\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}}{e^{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}}\right)$$

Eller hvis man foretrækker de hyperbolske funktioner:

(20) $$v(t) = -\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}\cdot\tanh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)$$

Ved integration af (20) for at finde stedfunktionen $y(t)$ kan man vise, at man får følgende endelige løsning til problemet:

(21) $$y(t) = -\frac{m}{D}\cdot\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right) + y_0$$

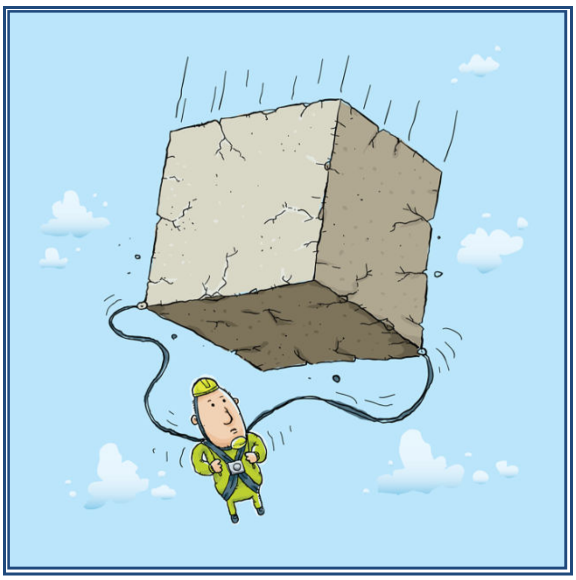
Lad os se på et par konsekvenser af ovenstående løsninger.

g) Vis ved hjælp af den sidste ligning i (19), at man har følgende grænseværdi:

(22) $$v(t) \to \sqrt{\frac{m\cdot g}{D}} \quad \text{for} \quad t\to\infty$$

Overvej hvad (22) betyder fysisk set. Vil det samme ske for alle typer genstande?

□



Den sidste del af noten er ret avanceret. Som tidligere nævnt må man ty til *numeriske metoder*, når man skal bestemme løsninger til den generelle differentialligning (11). For at kunne gøre det, skal vi omskrive differentialligningssystemet lidt, så det bliver af 1. orden! Det kan gøres ved et lille trick ved at indføre to nye koordinater, som er lig med henholdsvis hastigheden i x-aksens retning $x_2(t) = x'(t)$ og hastigheden i y-aksens retning $x_4(t) = y'(t)$.

(23)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'(t) = v_x(t) \\ x_3(t) &= y(t) \\ x_4(t) &= y'(t) = v_y(t) \end{aligned}$$

Opgave 7

Vis at differentialligningssystemet (11) giver anledning til følgende system af differentialligninger af 1. orden, med ovenstående for øje:

(24)
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= -g-\frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_4 \end{aligned}$$

med randbetingelserne:

(25)
$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= v_0\cdot\cos(\alpha) \\ x_3(0) &= 0 \\ x_4(0) &= v_0\cdot\sin(\alpha) \end{aligned}$$

idet vi ønsker at bevægelsen starter i (0,0): $(x(0), y(0)) = (0,0)$ og at hastigheden til tiden 0 er givet ved: $(x'(0), y'(0)) = (v_0\cdot\cos(\alpha), v_0\cdot\sin(\alpha))$.

□

Differentialligningssystemet i (24) og (25) er et eksempel på et system, som vi lidt mere generelt og abstrakt kan skrive på følgende ”vektorform”:

(26)
$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(t,\vec{X})\,;\quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$$

hvor $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ og hvor $\vec{F}(t,\vec{X}) = (f_1(t,\vec{X}), f_2(t,\vec{X}), \ldots, f_n(t,\vec{X}))$ for givne funktioner $f_i(t,\vec{X}),\, i = 1,2,\ldots,n$. I dette tilfælde har vi altså:

(27)
$$\vec{F}(t,\vec{X}) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \end{pmatrix}$$

hvor

(28)
$$\begin{aligned} f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2 \\ f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= -\frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_2 \\ f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_4 \\ f_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= -g \;-\; \frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_4 \end{aligned}$$

I dette tilfælde har vi at gøre med et *autonomt* system, da t ikke figurerer på højre side!

Opgave 8 (CAS værktøj til løsning af model 2)

Du kan forsøge at løse differentialligningssystemet fra opgave 7 ved at benytte et avanceret CAS program, såsom *Maple*. Du kan passende benytte den såkaldte *klassiske 4. ordens Runge Kutta metode*.

Opgave 7 (Svær – Microsoft Excel til løsning af model 2)

Hvis du ikke har et CAS værktøj til rådighed, og du er hård til at programmere, så kan du selv lave et lille Excel VBA-program, hvor du implementerer den *klassiske 4. ordens Runge Kutta metode* til løsning af differentialligningssystemet. På ”vektorform” lyder metoden således: Antag at et datapunkt $(t_k,\vec{X}_k)$ er kendt. Det næste punkt ved skridt på h i tid fås på følgende måde:

(29)
$$\begin{aligned} \vec{K}_1 &= \vec{F}(t_k,\vec{X}_k) \\ \vec{K}_2 &= \vec{F}(t_k+\tfrac{1}{2}h,\vec{X}_k+\tfrac{1}{2}h\cdot\vec{K}_1) \\ \vec{K}_3 &= \vec{F}(t_k+\tfrac{1}{2}h,\vec{X}_k+\tfrac{1}{2}h\cdot\vec{K}_2) \\ \vec{K}_4 &= \vec{F}(t_k+h,\vec{X}_k+h\cdot\vec{K}_3) \\ \vec{K} &= \frac{\vec{K}_1+2\vec{K}_2+2\vec{K}_3+\vec{K}_4}{6} \end{aligned}$$

Næste punkt: $(t_{k+1},\vec{X}_{k+1}) = (t_k+h;\vec{X}_k+h\cdot\vec{K})$.

Forslag til yderligere undersøgelser

- Undersøg *kastelængden* og *kastehøjden*, når der er luftmodstand.
- Undersøg, hvor man skal sigte, hvis man skal ramme en genstand i en given position. Man må nødvendigvis sigte højere … Du kan eventuelt nøjes med at kigge på tilfældet uden luftmodstand her.