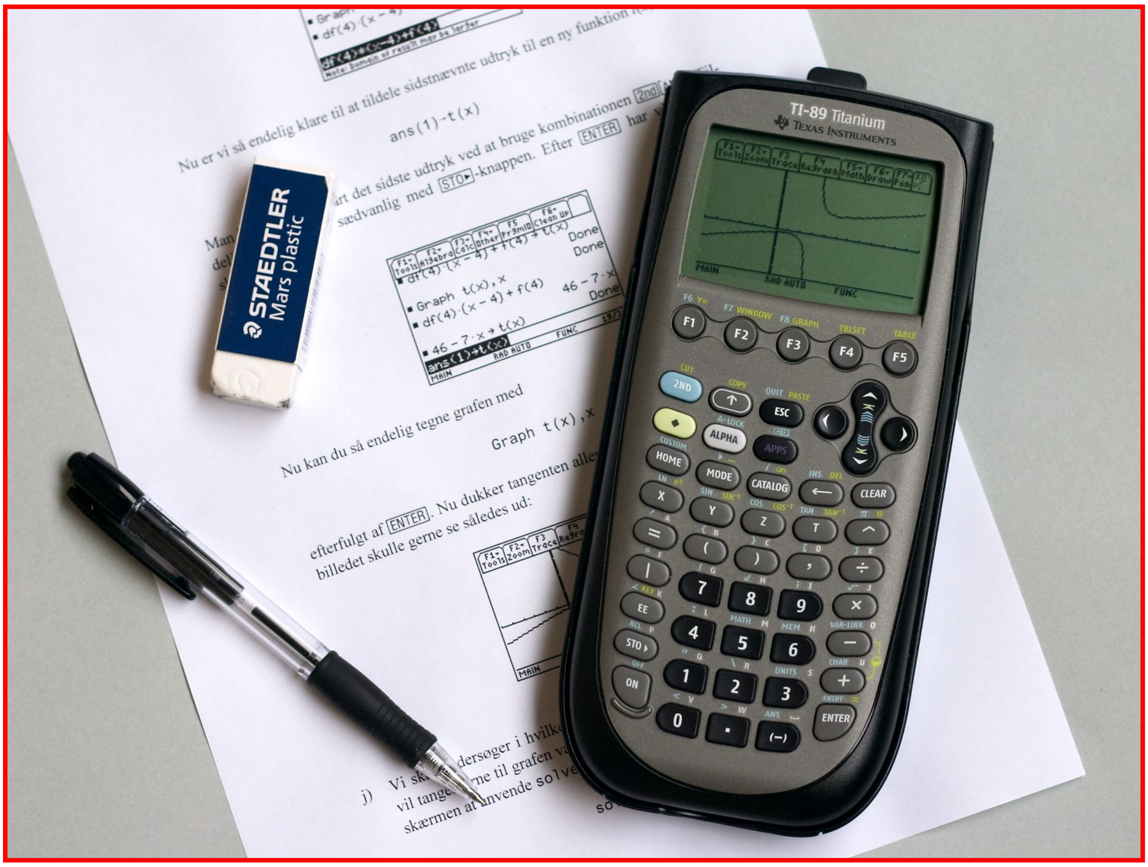
Funktionsundersøgelser med
TEXAS TI-89 TITANIUM



Haderslev, december 2006,

Funktionsundersøgelse med Texas TI-89

Vigtigt: Før du starter denne øvelse er det vigtigt, at din grafregner er opdateret med det p.t. nyeste operativ system 3.10. Hvis dette ikke er tilfældet, kan det være, at du ikke kan finde visse menuer i Texas 89 Titanium. Du bør i så fald downloade og installere den nødvendige opdatering fra www.education.ti.com.

I denne øvelse skal vi se, hvordan man kan analysere en funktion ved hjælp af grafregneren. Som udgangspunkt vil vi betragte følgende funktion:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

Opgaver

a) Bestem definitionsmængden.
b) Bestem funktionsværdien $f(5)$.
c) Angiv eventuelle nulpunkter for *f*.
d) Angiv monotoniforholdene for *f* samt lokale ekstrema.
e) Angiv eventuelle asymptoter for *f*.
f) Bestem værdimængden for funktionen.
g) Løs ligningen $f(x) = 20$.

Givet en anden funktion $g(x) = x^2 - 5$.

h) Løs ligningen $f(x) = g(x)$
i) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i $x = 4$ og tegn tangenten.
j) Bestem punkter på grafen for *f*, hvori tangenten er parallel med $y = -2x + 8$.

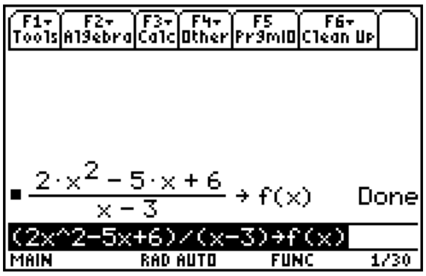
Løsninger

a) Denne opgave kan vi løse uden brug af lommeregner, idet vi blot skal sikre os, at nævneren ikke giver 0: $N = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$. Dvs. $\text{Dm}(f) = R \setminus \{3\}$.

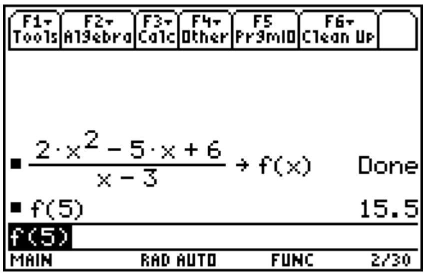
b) Som bekendt kan man indtaste en forskrift for en funktion i [Y=]-editoren. Vi skal imidlertid se en alternativ metode, som faktisk er en mere generel metode, hvor man også kan lade andre end blot *x* være den uafhængige variabel. Start hovedskærmen med [HOME] og rens eventuelt skærmen med [F1] `8:Clear Home` [CLEAR]. På hovedskærmen vil definitionen af funktionen ovenfor se således ud:

```
(2x^2-5x+6)/(x-3)→f(x)
```

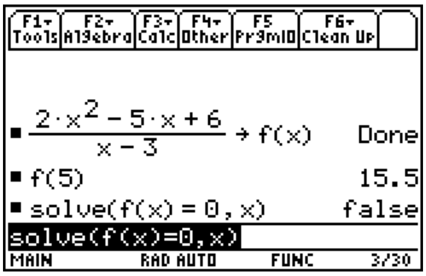
hvor → laves med [STO▸]-knappen. Bemærk, at du kan kalde funktionen næsten hvad som helst – navnet må dog ikke starte med et tal. Navnet skrives via det alfanumeriske tastatur, som kan når ved brug af [alpha]-knappen. Bemærk, at hvis du skal skrive mange bogstaver, så kan du undgå at skulle taste [alpha] før hver bogstav ved bruge [2nd][a-lock]. Aktiveres den igen, kommer man tilbage til hovedtastaturet. Men her er det bare f, du skal skrive. Efter ovenstående indtastning afsluttes af et [ENTER], skulle det gerne se således ud:



Vi er nu klar til at finde funktionsværdien i 5. Skriv `f(5)` og tryk [◆][ENTER] for at få [≈], dvs. resultatet med decimaler. Vi ser, at resultatet er $f(5) = 15{,}5$:



c) Vi skal have fundet nulpunkterne for *f*. Hertil aktiveres *Algebra* menuen via [F2]. Vælg `1: solve(`. Bemærk, at du alternativt kan skrive det samme med det alfanumeriske tastatur, men her kan det altså hentes uden videre via *Algebra* menuen. For at løse $f(x) = 0$ fuldføres indtastningen til `solve(f(x)=0,x)`. Bemærk, at du skal benytte kommaet [,], *ikke* decimal-punktummet! Grunden til, at man skal skrive et komma efterfulgt af et *x* er, at maskinen skal have fortalt, at det er *x*, som er den ubekendte. Man kan indtaste funktioner, som har flere variable, og da er det vigtigt at vide, hvilken en variabel, man vil løse ligningen med hensyn til!



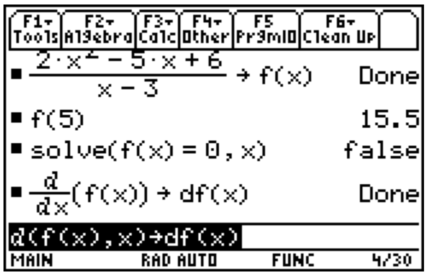
Efter [◆][ENTER] ser vi, at vi får svaret false. Det betyder ikke, at der er sket en fejl, men at maskinen ikke kan finde nogen nulpunkter. Svaret på opgaven er derfor:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \varnothing$$

d) For at finde ud af monotoniforholdene for *f*, skal vi analysere differentialkvotienten $f'(x)$. Man kan få maskinen til at udregne denne symbolsk, og så tildele dette udtryk til en ny funktion, som vi vælger at betegne *df*(*x*). Dette kan ske ved at man på hovedskærmen skriver:

`d(f(x),x)→df(x)`

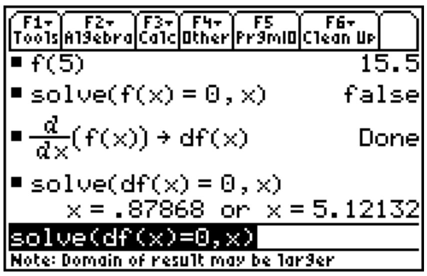
Det symbolske udtryk for differentialkvotienten med hensyn til den variable *x* er den del af udtrykket, som står til venstre for pilen. Det indtastes ved for eksempel at benytte *Calc*-menuen via [F3] og `1:d( differentiate` eller alternativt benytte tastekombinationen [2nd][*d*]. Herefter skrives resten. Tildelingspilen → indtastes med [STO▸]. Vi kunne have valgt at kalde differentialkvotienten næsten hvad som helst. I dette tilfælde vil vi altså kalde den *df*(*x*). Efter [ENTER] ser vi, at skærmen viser:



Vi er langt fra færdige med spørgsmålet. Hidtil har vi blot fået udregnet differentialkvotienten og tildelt den til en funktion, som vi kalder *df*(*x*). For at finde monotoniforholdene skal vi først have løst, hvornår differentialkvotienten er lig med 0. Det gøres ved hjælp af solve:

`solve(df(x)=0,x)`

Afsluttet med [◆][ENTER] giver det følgende skærm:



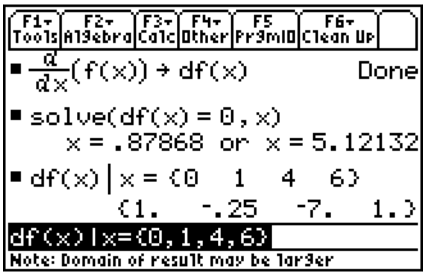
Vi får angivet følgende numeriske resultater:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}87868 \ \vee \ x = 5{,}12132$$

Bemærk, at der forneden står: *Note: Domain of result may be larger*. Så lommeregneren giver altså et lille forbehold for, at der kan være flere løsninger. Vi vælger at stole på maskinen: Vi har altså et punkt, hvor *f* ikke er defineret ($x = 3$) og to steder, hvor differentialkvotienten er nul: $x = 0{,}87868$ og $x = 5{,}12132$. Da differentialkvotienten er positiv i de intervaller, hvor den er defineret, kan vi nøjes med at evaluere differentialkvotienten i fire punkter imellem og uden for disse punkter. Vi vælger følgende x-værdier: 0; 1; 4 og 6. Man kan selvfølgelig finde de ønskede differentialkvotienter en ad gangen ved at taste `df(Ø)`, `df(1)`, `df(4)` og `df(6)`. Man kan dog finde disse værdier på en gang med *With*-operatoren $\boxed{|}$:

`df(x)|x={Ø,1,4,6}`

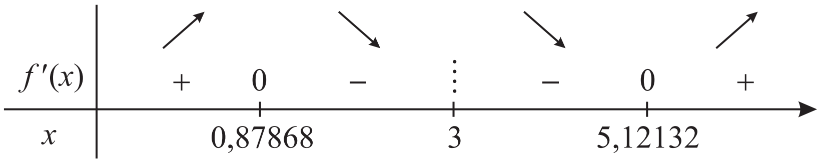
Efter $\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{ENTER}}$ giver det følgende skærm:



Altså:

x	$f'(x)$	Fortegn
0	1	+
1	–0,25	–
4	–7	–
6	1	+

Dette giver følgende tallinje for differentialkvotienten:

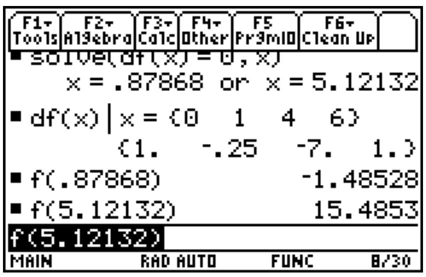


Hvoraf ses, at

f er voksende i $\left]-\infty; 0{,}87868\right]$ og i $\left[5{,}12132; \infty\right[$
f er aftagende i $\left[0{,}87868; 3\right[$ og i $\left]3; 5{,}12132\right]$

f har lokalt maksimum i $x = 0{,}87868$ med værdi $f(0{,}87868) = -1{,}48528$
f har lokalt minimum i $x = 5{,}12132$ d værdi $f(5{,}12132) = 15{,}4853$

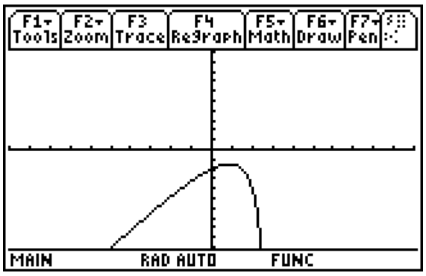
Sidstnævnte funktionsværdier fås ved at taste `f(Ø,87868)` og `f(5,12132)` efterfulgt af $\boxed{\blacklozenge}\boxed{\text{ENTER}}$, helt som sædvanligt:



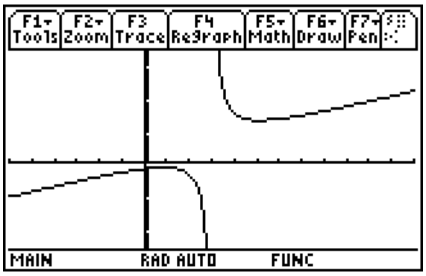
Billedet kan bekræftes ved at tegne grafen for *f* i et passende interval omkring de interessante tre punkter ovenfor. På skærmen skal stå:

`Graph f(x),x`

I stedet for at skrive ordet Graph via det alfanumeriske tastatur og lave et mellemrum med [␣], kan man hente det hurtigere via menuen *Other* med kombinationen [F4] og `2:Graph`. Efter at have tilføjet `f(x),x` og trykket [ENTER], fås:



Vi anvender her *standardvinduet*, hvor både *x* og *y* vises i intervallet fra –10 til 10, hvilket i grafvinduet fås i menuen `Zoom`, ved at klikke [F2] og herefter vælge punktet `6:ZoomStd.` Men vi ved allerede, at der er et lokalt minimum med en *y*-værdi på over 15, så det vil være hensigtsmæssigt at udvide vinduet, så det interessante kan ses. Via [◆][WINDOW] sættes *xmin* og *xmax* til henholdsvis –6 og 12 og *ymin* og *ymax* til henholdsvis –30 og 40. Tegn igen grafen med [◆][GRAPH]. Monotoniforholdene og de lokale ekstrema bestemt ovenfor ses at stemme fint:



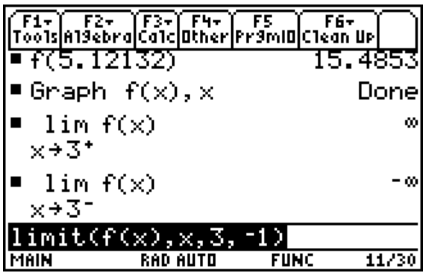
e) Vi skal undersøge eventuelle *asymptoter*. Hvad angår lodrette asymptoter, så er det et kritisk sted at undersøge funktionen i nærheden af det punkt, hvor den ikke er defineret, altså i $x = 3$. På figuren kunne det se ud som om funktionen går imod uendelig, når *x* nærmer sig til 3 fra højre og at funktionen går imod minus uendelig, når *x* nærmer sig til 3 fra venstre ... men kan man virkelig stole på denne observation? For at afgøre dette kan man benytte maskinen til at finde grænseværdier. Gå tilbage til hovedskærmen med [HOME]. Indtast nu, så der står:

`limit(f(x),x,3,1)`

Ordet `limit` kan hentes hurtigt i *Calc*-menuen via [F3] og `3:limit`. Efter [ENTER], fås en bekræftelse på, at funktionen går imod uendelig. På tilsvarende måde undersøges grænseværdien fra venstre med

`limit(f(x),x,3,-1)`

Det bekræftes, at funktionen går imod minus uendelig. Skærmen viser:



Bemærk, at den sidste parameter i limit-udtrykket afgør, om man kommer fra højre eller venstre: Hvis parameteren er 1, kommer man fra højre, hvis den er –1, kommer man fra venstre. Hvis den sidste parameter undlades, vil grænseværdien for x gående mod 3 blive angivet. Hvis man gør det i dette tilfælde, vil man få svaret `undef` for udefineret, da grænseværdien fra venstre og højre ikke er ens, og funktionen dermed ikke har en grænseværdi for x gående imod 3. Vi har altså vist: dette:

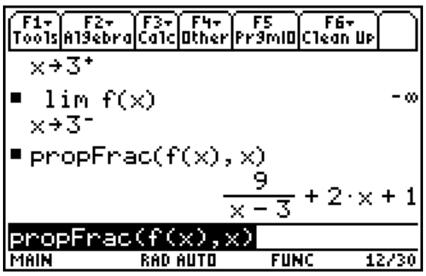
$$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 3^-$$

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 3^+$$

og dermed er $x = 3$ en *lodret asymptote*. Vi skal nu undersøge, hvad der sker med funktionen, når x nærmer sig til minus og plus uendelig. En direkte inspektion af funktionsudtrykket – selv uden brug af grafregner – giver straks at $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$ og $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Graden af tælleren er nemlig 2, mens graden af nævneren er 1 (Overvej!). Betragt grafen igen: Det ser ud til, at funktionen ser næsten lineær ud imod plus og minus uendelig. Vi vil vise, at dette ikke er nogen tilfældighed. Da graden af tælleren i polynomiumsbrøken er større end graden af nævneren, så kan man få grafregneren til at gøre udtrykket til en *ren brøk*, underforstået et udtryk med en brøk, hvor graden af tælleren bliver størst. Den matematiske teknik hedder *polynomiets division*. Grafregneren kan gøre det med en funktion, som hedder `propfrac` (Proper Fraction). Sørg for, at der står:

```
propfrac(f(x),x)
```

Funktionen kan findes hurtigt i *Algebra*-menuen via $\boxed{\text{F2}}$ og `7:propfrac(`. Efter tryk på $\boxed{\text{ENTER}}$ fås:



Grafregneren har altså foretaget følgende omskrivning af *f*:

$$f(x) \;=\; \frac{2x^2-5x+6}{x-3} \;=\; \frac{9}{x-3}+2x+1$$

Det nye udtryk for funktionen er mere hensigtsmæssig til at besvare vores spørgsmål: *f* er altså en sum af en lineær funktion og en brøk, som åbenlyst går mod 0 for x gående mod plus og minus uendelig. Vi siger, at $y = 2x+1$ er en *skrå asymptote*. Ordet asymptote hentyder til, at funktionen vil nærme sig til denne linje, når x nærmer sig til plus eller minus uendelig. Følgende udtryk viser således, at *den lodrette afstand* mellem grafen for *f* og linjen nærmer sig til 0:

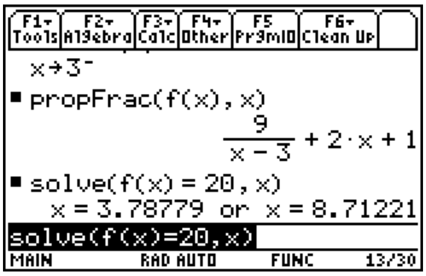
$$\left|f(x)-(2x+1)\right| \;=\; \left|\frac{9}{x-3}+2x+1-(2x+1)\right| \;=\; \left|\frac{9}{x-3}\right| \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \pm\infty$$

Kommentar: Bemærk, at man fra grafvisningsvinduet – eventuelt benyt [◆][GRAPH] for at komme derind – kan slå opdagelsen af diskontinuitetspunkter fra eller til via [F1] `9:Format...` og sætte *Discontinuity Detection* til `on` eller `off`.

f) Værdimængden har man næsten automatisk udfra d) og e) og fordi funktionen er kontinuert i de intervaller, hvor den er defineret:

$$\mathrm{Vm}(f) \;=\; \left]-\infty; -1{,}48528\right] \;\cup\; \left[15{,}4853; \infty\right[$$

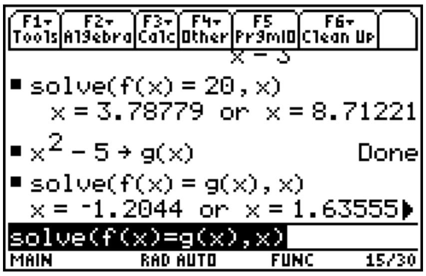
g) For at løse ligningen, skal der på hovedskærmen stå `solve(f(x)=20,x)`, som efterfulgt af [◆][ENTER] giver:



så svaret er:

$$f(x) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3{,}78779 \;\vee\; x = 8{,}71221\,.$$

h) Definer en ny funktion på hovedskærmen med: `x^2-5→g(x)`, efterfulgt af [ENTER]. Herefter skal der skrives `solve(f(x)=g(x),x)`, efterfulgt af [◆][ENTER]. Det giver følgende skærmbillede:



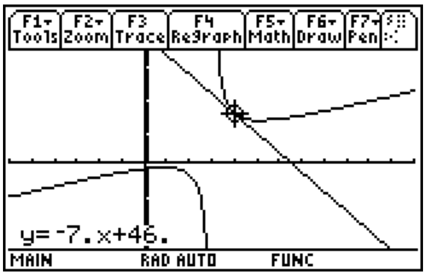
Bemærk, at man må benytte piletasterne for at kunne se alle løsninger. Det giver:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,2044 \;\vee\; x = 1,63555 \;\vee\; x = 4,56885$$

i) Vi skal se to løsningsmetoder i denne opgave. Den første betegner vi *den simple metode til tangentbestemmelse*. Fordelen ved den er, at man lynhurtigt kan besvare den aktuelle opgave. Den anden *avancerede metode til tangentbestemmelse* gør det på en måde, som tager længere tid at fuldføre i den aktuelle opgave. Til gengæld anviser den en vej, som er mere generel, og som sætter én i stand til at løse mere komplekse problemer, som for eksempel spørgsmål j) eller opgaver af typen, hvor et punkt på tangenten er kendt, mens tangentens røringspunkt er ukendt. (se opgave 10). Lad os afprøve begge metoder.

Den simple metode til tangentbestemmelse

Sørg for, at du er i grafvinduet, eventuelt ved at taste ◆[GRAPH]. Vælg menuen `Math` ved at klikke F5. Vælg undermenuen `A:Tangent`. Der spørges straks om hvilket punkt tangenten ønskes bestemt i. Da røringspunktets 1. koordinat er 4, tastes 4 ENTER. Efter ganske kort tid ses den afbildede tangent, samt dens forskrift: $y = -7x + 46$:



Bemærk i øvrigt, at menuen `Math` i grafvinduet har en lang række smarte undermenuer, herunder nulpunktsbestemmelse (*Zero*), lokalt minimum (*Minimum*), lokalt maksimum (*Maximum*). Ofte skal man angive en nedre grænse (*Lower Bound*) og en øvre grænse (*Upper Bound*) for de søgte størrelser. Prøv selv at eksperimentere med dem! Man kan også bestemme skæringspunkter mellem to grafer (*Intersection*) eller bestemme differentialkvotienter (*Derivatives*). Læseren opfordres til at afprøve disse muligheder. Bemærk, at du naturligvis også kan benytte denne metode, hvis funktionerne er indtastet i [Y=]-editoren!

Den avancerede metode til tangentbestemmelse

Som bekendt kommer ligningen for tangenten i $x = 4$ til at se således ud:

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

Vi har jo allerede tidligere tildelt differentialkvotienten til `df`, så det kan være, at du får den (dårlige) idé direkte at opskrive et udtryk for tangentens ligning og straks tildele det til en ny funktion, som du kalder `t(x)`, for derefter straks at ville tegne grafen med `graph`, altså udføre følgende:

`df(4)*(x-4)+f(4)→t(x)` [ENTER]

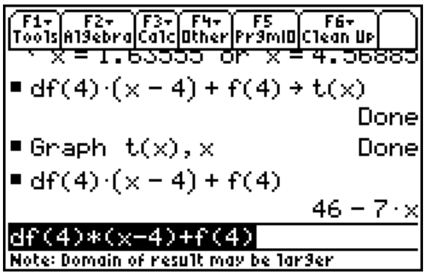
`Graph t(x),x`

Husk at pilen frembringes med [STO▸]. Når du sætter graftegningen i gang ved at trykke på [ENTER] vil du opleve, at selve grafen for *f* tegnes hurtigt, men herefter går det rigtigt langsomt: der går omkring 1½ minut før du overhovedet kan se, at tangenten kommer til syne og så er den endda langt fra færdig. Maskinen regner, så længe der står `busy` helt nede i højre hjørne af displayet. Du bliver træt af at vente! Heldigvis er der kommandoer, hvorved du kan få maskinen til at standse de endeløse udregninger: Tryk [ENTER] og observer, at `busy` er udskiftet med `pause`. Det betyder, at du i princippet kunne genoptage graftegningen ved igen at trykke på [ENTER], men det gør du naturligvis ikke. I stedet trykker du på [ON], for at få maskinen til at stoppe handlingen fuldstændigt. Klik på [HOME], for at komme tilbage til hovedskærmen.

Grunden til, at det tog så lang tid at tegne grafen er, at grafregneren skal udregne en masse støttepunkter, men for hvert *x*, som indsættes, skal både `df(4)` og `f(4)` beregnes pånу. Dette er egentligt spild, for disse tal er jo de samme hele tiden! Derfor vil det være fornuftigt at gøre det på en hel ny måde: vi vil sørge for, at udtrykket for tangentens ligning reduceres *før* tangenten tegnes. Det kan ved først at udføre følgende:

`df(4)*(x-4)+f(4)` [ENTER]

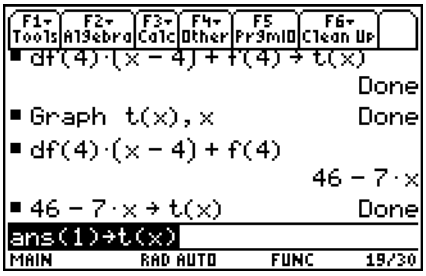
For at undgå at skulle skrive dette igen, kan du eventuelt med piletasterne gå op i *historik*-området og markere den gamle dårlige linje `df(4)*(x-4)+f(4)→t(x)` ned på *indtastningslinjen* og så slette den sidste del af linjen, dvs. `→t(x)`. Afslut med [ENTER] og observer, at du nu får skrevet det udregnede og reducerede udtryk for tangentens ligning. Det giver følgende skærmbillede:



Nu er vi så endelig klare til at tildele sidstnævnte udtryk til en ny funktion $t(x)$.

```
ans(1)→t(x)
```

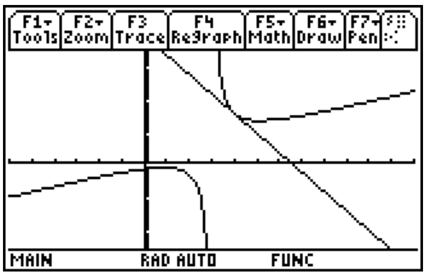
Man hentede her smart det sidste udtryk ved at bruge kombinationen [2nd][ANS]. Tildelingen sker som sædvanlig med [STO▸]-knappen. Efter [ENTER] har vi følgende skærmbillede:



Nu kan du så endelig tegne grafen med

```
Graph t(x),x
```

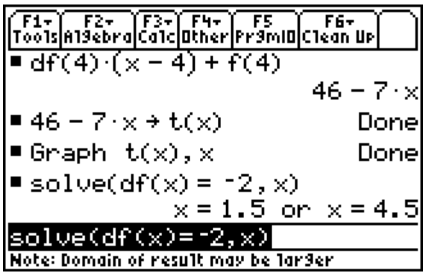
efterfulgt af [ENTER]. Nu dukker tangenten allerede op efter ca. 14 sekunder. Skærmbilledet skulle gerne se således ud:



j) Vi skal undersøger i hvilke x-værdier differentialkvotienten er lig med –2, for her vil tangenterne til grafen være parallelle med $y = -2x + 8$. Det klares ved på hovedskærmen at anvende `solve`-funktionen. Husk, at benytte [(-)] som minus:

```
solve(df(x)=-2,x)
```

Efterfulgt af [◆][ENTER] fås følgende skærmbillede:

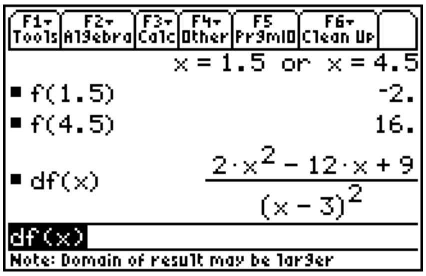


For at få de tilsvarende *y*-værdier indsættes *x*-værdierne i forskriften for *f* med

`f(1.5)` [◆][ENTER].
`f(4.5)` [◆][ENTER]

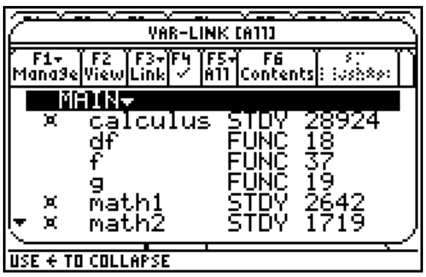
Det giver følgende røringspunkter for tangenterne: $(1,5;-2)$ og $(4,5;16)$.

Måske får du pludselig lyst til at se, hvordan forskriften for differentialkvotienten egentligt ser ud. Det er nemt med: `df(x)` [ENTER]:



Vigtige bemærkninger om grafer og variable

Det er vigtigt at forstå, at grafregneren husker de nye tildelinger af funktioner samt eventuelle andre værdier, du måtte have defineret, også når du slukker maskinen og næste gang du går i gang med et nyt projekt. Også selv om du sletter de sætninger i *historik*-området på hovedskærmen, hvor funktionerne og værdierne blev defineret. Prøv at klikke på [2nd][VAR-LINK] og bemærk, at der dukker en hel liste af forskellige størrelser op, som vist på næste side.



Måske har du endda flere end disse, fordi du har foretaget andre ting. Men i hvert fald ser vi, at funktionerne `f`, `g` og `df` figurerer. Funktionen `t` findes længere nede, som man kan se ved at benytte piletasterne. Hvis du vil slippe af med nogle tildelinger, så de ikke forstyrrer eventuelle andre opgaver, så kan de slettes her! Man skal dog passe lidt på, fordi det fx kan påvirke tegningen af grafer fra hovedskærmen, hvis de slettede variable skal bruges her! Så kan man ende med at få meddelelsen *undefined variable*. Måske vil du også blive overrasket over, at maskinen fint kan blive ved med at tegne grafer, du tidligere har bedt om i hovedskærmen – selv om historik-området og indtastningsfeltet er blevet slettet for indhold. Det skyldes, at sidstnævnte sletning ikke påvirker de variable og de operationer såsom graftegning, som der tidligere er defineret. For at starte på en hel frisk i hovedskærmen kan man benytte:

Tryk [HOME]
Vælg menuen `Clean Up` med [2nd][F6]
Vælg `2:NewProb`
Afslut med [ENTER]

Denne operation gør følgende:

- Rydder alle enkeltbogstavs-variabelnavne i den aktuelle mappe, hvis ikke variablene er låst eller arkiveret.
- Lukker alle funktioner og statistiske plots i den aktuelle tegnetilstand.
- Rydder tegnevinduet og gør at tidligere grafer ikke kan gentegnes.
- Sletter eventuel fejlstatus.
- Rydder historikområdet
- m.m.

Funktioner indtastet i [Y=]-editoren slettes *ikke*, men deres tegning slås fra. Kan aktiveres igen i editoren med flueben med [F4].

Hvis du vil gøre noget mindre drastisk end ovenstående sletning, kan du anvende:

Tryk [HOME]
Vælg menuen `Other` med [F4]
Vælg `5:ClrGraph`
Afslut med [ENTER]

Her vil alle grafer tegnet med `graph` blive slettet. De funktioner, som måtte være oprettet med `Table` slettes også. Påvirker ikke [Y=]-editoren.

Kort oversigt

Foretag med Texas 89 Titanium en undersøgelse af funktionen $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

Indtastning af funktion

Hovedskærmen åbnes med [HOME] og der skrives `(2x^2-5x+6)/(x-3)→f(x)`, hvor pilen fås med [STO▸].

Definitionsmængden

Tal skal fjernes, hvor nævneren giver 0: undersøges med `solve(x-3=0,x)`

Nulpunkter for *f*

I hovedskærmen skrives: `solve(f(x)=0,x)`

Udregning af differentialkvotient

I hovedskærmen skrives *d*`(f(x),x)→df(x)`, hvor differentiationsoperatoren frembringes med tastekombinationen [2nd][*d*]. Sidstnævnte over tasten [8]. Her er den differentierede funktion blevet tildelt en ny funktion `df(x)`.

Monotoniforhold og lokale ekstrema

I hovedskærmen skrives: `solve(df(x)=0,x)` for at finde de steder, hvor differentialkvotienten er 0. Man tegner herefter en tallinje for $f'(x)$, hvor definitionsmængden også inddrages. Fortegn for $f'(x)$ findes ved at evaluere funktionen i et antal punkter. Dette kan foretages på hovedskærmen med et udtryk af formen `df(x)|x={0,1,4,6}`. Bemærk, at den lodrette streg betyder, at differentialkvotienten `df(x)` bestemmes i de efter stregen angivne x-værdier. Hvis det kunne skulle gøres i et punkt, fx. 4, kunne man nøjes med at skrive `df(x)|x=4`. Efter at fortegnene er fyldt ind på tallinjen kan monotoniforhold og eventuelle lokale ekstrema eller vandrette vendetangenter aflæses.

Asymptoter

Grænseværdier for funktionen kan undersøges med udtryk af formen `limit(f(x),x,3,1)`. Tredje parameter angiver det tal, man lader x nærme sig til (evt. ∞), mens den fjerde parameter anvendes, hvis man kun undersøger grænseværdien fra en af siderne: 1 for *højre* side og –1 for *venstre* side. Hvis man har at gøre med en polynomiumsbrøk, hvor graden af tælleren mindst er lig med graden af nævneren, kan brøken omskrives med `propfrac(f(x),x)`.

Løse ligninger af typen $f(x) = 20$ eller $f(x) = g(x)$

Anvend: `solve(f(x)=20,x)` henholdvis `solve(f(x)=g(x),x)`.

Udregne tangenter og tegne dem

Simple metode: I grafvinduet vælges menuen `Math` med [F5] og herefter `A:Tangent`. x-værdien for røringspunktet indtastes. *Avancerede metode*: Lad først Texas udregne tangenten med `df(4)*(x-4)+f(4)` [ENTER]. Tildel udtrykket til en ny funktion `t(x)` med `ans(1)→t(x)`. Benyt her [2nd][ANS]. Tangenten kan herefter tegnes med `Graph t(x),x`.

Opgaver

Opgave 1

I opgaverne skal du indtaste funktionerne i [Y=]-editoren og tegne grafen via [◆][GRAPH]. Dernæst skal du tegne og aflæse forskriften for tangenten til grafen i den anførte x-værdi på følgende måde: I grafvinduet vælges menuen `Math` ved at klikke [F5] og herefter vælges undermenuen `A:Tangent`, og til slut indtastes x-værdien efterfulgt af [ENTER].

a) Tangenten til grafen for $f(x) = x^3 - 4x - 4$ i $x_0 = 1{,}5$.

b) Tangenten til grafen for $f(x) = (x+5)\cdot\ln(x) - 3x$ i $x_0 = 1$.

c) Tangenten til grafen for $f(x) = \dfrac{2x^4+5}{x^3-8}$ i $x_0 = 4$.

d) Tangenten til grafen for $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$, $0 \le x \le 10$ i $x_0 = 6$.

e) Tangenten til grafen for $f(x) = x \cdot \sin(x) - \cos(x)$ i $x_0 = \frac{5}{6}\pi$ (Husk radianer!).

f) Tangenten til grafen for $f(x) = \dfrac{8}{1+e^{-1{,}5x}}$ i $x_0 = -1$.

Opgave 2

Benyt [Y=]-editoren til at indtaste forskrifterne for funktionerne $f(x) = 1{,}5\cdot x^3 - 3^x$ og $g(x) = -0{,}5x + 6$ og tegn deres grafer med [◆][GRAPH]. Sørg for via [◆][WINDOW] at vælge et vindue, så du kan se de interessante dele af graferne.

a) Bestem løsningerne til ligningen $f(x) = g(x)$.

Hjælp: I grafvinduet vælges menuen `Math` ved at klikke [F5] og herefter vælges undermenuen `5:Intersection`. Du spørges om `1st Curve` og ser hvilken kurve markøren står på og klikker [ENTER]. Så spørges du om `2nd Curve`. Her skal du med piletasterne bevæge markøren hen på den anden graf, hvis den ikke allerede er der, efterfulgt af [ENTER]. Herefter skal du angive først `Lower Bound`, dvs. en x-værdi til venstre for der, hvor skæringspunktet er, efterfulgt af [ENTER]. Derefter en `Upper Bound`, dvs. en x-værdi til højre for det ønskede skæringspunkt, efterfulgt af [ENTER]. Efter lidt tid vises både x- og y-værdi for skæringspunktet. Du skal selvfølgelig kun bruge x-værdien. Bemærk, at du er nødt til at tage hver skæringspunkt for sig. Der er et til!

b) Bestem $f'(3)$ i grafvinduet via menuen `Math` og undermenuen `6:Derivatives`. Indtast x-værdien.

c) Bestem lokale maksima for f i undermenuen `4:Maximum` i menuen `Math` ....

d) Overvej, hvordan du kunne have løst opgaven i spørgsmål a) i hovedskærmen. Hvordan kan du i øvrigt være sikker på, at der ikke er flere end de to løsninger, du kan se grafvinduet?

Opgave 3

Betragt funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+9}$

a) Angiv definitionsmængden for *f*.
b) Bestem funktionens asymptoter.
c) Løs ligningen $f(x)=30$.
d) Bestem ligningen for tangenten til grafen i $x=4$.

Opgave 4

Lad $f(x) = -x^3+2x^2-1$.

a) Indtast funktionen i [Y=]-editoren og tegn grafen med [◆][GRAPH]. Sørg for at vælge standardvinduet i menuen `Zoom`, ved at klikke [F2] og herefter vælge `6:ZoomStd`. Observer, at der ser ud til at ligge tre nulpunkter: En imellem –1 og 0, én mellem 0 og 1,5 og en mellem 1,5 og 2. Husk, at man specielt her kan sige, at der ikke kan være flere nulpunkter, da et tredjegradspolynomium højst kan have 3 nulpunkter.
b) Bestem nulpunkterne for funktionen i grafvinduet via menuen `Math`. Det gøres ved at taste [F5] og vælge punktet `2:Zero`. Du skal nu for hvert nulpunkt, du ønsker bestemt, indtaste en nedre grænse (Lower Bound) og en øvre grænse (Upper Bound) for at få nulpunktet bestemt: Se overvejelserne under spørgsmål a). Find de tre nulpunkter på denne måde.
c) Husk, at nulpunkterne også kan findes i hovedskærmen (tast [HOME]) og anvend funktionen `solve`. Observer, at den giver nulpunkterne uden angivelse af lower og upper bound og alle på en gang!
d) Gå tilbage i grafvinduet med [◆][GRAPH]. Du skal udføre simpel tangentbestemmelse i punktet $x=2$ i menuen `Math` ved at taste [F5] og vælge `A:Tangent` og svare 2, efterfulgt af [ENTER]. Bemærk, at tangenten straks tegnes og forskriften vises!

Opgave 5

Bestem asymptoterne for funktionen $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-9}$.

Opgave 6

Lad $f(x) = \dfrac{3x^2-12}{2^x-2} + 3$

a) Angiv definitionsmængden.
b) Løs ligningen $f(x)=33$.
c) Løs ligningen $f'(x)=5$ (vær lidt tålmodig her!)
d) Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Opgave 7

Nedenstående funktion har to asymptoter. Bestem dem og brug blandt andet herunder `propfrac`-funktionen i grafregneren.

$$f(x) = \frac{2x^2+x-45}{2x+3}$$

Opgave 8

Betragt funktionen $f(x)=5+1,2^x$.

a) Angiv definitionsmængden.

b) Løs ligningen $f(x)=50$.

c) Grafen for f har en tangent, som har hældning 4. Bestem tangentens forskrift.

d) Bestem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

e) Hvad sker der med $f(x)$, når $x\to\infty$?

f) Bestem monotoniforholdene for *f* og brug det, sammen med ovenstående, til at bestemme værdimængden $\text{Vm}(f)$.

Opgave 9

Lad $f(x)=8\sqrt{x}-3x$.

Funktionen har en tangent, som passerer igennem punktet $(-3,1)$. Bestem en ligning for denne tangent. *Hjælp*: Husk, at ligningen for tangenten er $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. I denne opgave er det x_0, som er ukendt, mens man kender et punkt $(x,y)=(-3,1)$, som tangenten passerer igennem, så $1=f'(x_0)(-3-x_0)+f(x_0)$. Benyt grafregneren til at løse ligningen med hensyn til x_0. I grafregneren kan du eventuelt kalde den ubekendte for `xØ`. Når røringspunktet er bestemt, kan tangentens ligning bestemmes.

Opgave 10

Grafen for funktionen $f(x)=\sqrt{1+3x^2}$ har en tangent, som passerer igennem punktet $(4,4;\,2)$. Bestem tangentens røringspunkt med grafen.

Opgave 11

Lad $f(x)=x^2-2^x$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $(3,f(3))$.

b) Tangenten fra spørgsmål a) passerer igennem et andet punkt på grafen for *f*. Bestem koordinatsættet til dette punkt.

Opgave 12

Lad $f(x) = ax^2 + 3x$, hvor $a \in R$. Det oplyses, at grafen for *f* har tangenten $y = 2x + 7$. Bestem *a*.

Hjælp: Vi kalder denne type opgave for en "parameteropgave", idet den indeholder en ukendt parameter *a*. For forskellige værdier af *a* fås en hel familie af funktioner, og én af dem har en graf med den nævnte tangent. Der er to ting, som skal være opfyldt, for at en linje er en tangent til en graf for en funktion *f*: Dels skal de have et fælles *rørings-punkt* x_0 og i dette punkt skal hældningerne for graf og linje være ens. Det giver to ligninger, som skal være opfyldt, men der er også to ubekendte: x_0 og *a*. Hvis vi kalder den lineære funktion svarende til tangenten for *g*: $f(x_0) = g(x_0)$ og $f'(x_0) = g'(x_0)$, hvilket her giver $ax_0^2 + 3x_0 = 2x_0 + 7 \;\wedge\; 2ax_0 + 3 = 2$. Du kan imidlertid også få grafregneren til at løse problemet ved først på hovedskærmen at definere funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ med [STO▶], udregne deres differentialkvotienter med [2nd][*d*] og tildele disse udtryk til to nye funktioner, du kan kalde `df(x)` henholdsvis `dg(x)`. Vær opmærksom på, at når du indtaster $ax^2 + 3x$, så *skal* du huske at anvende gangetegn [×] imellem *a* og *x*, for ellers vil lommeregneren tro, at du indfører en ny variabel `ax` – dette problem opstår aldrig, når der er et tal foran `x`. Man kan kun håbe, at grafregneren er i stand til at løse det komplicerede sæt af to ligninger med to ubekendte. Det kan gøres med:

```
solve(f(xØ)=g(xØ) and df(xØ)=dg(xØ),{xØ,a})
```

Bemærk, at de to ligninger begge skal være opfyldt på samme tid, så der skal `and` imellem. Endvidere skal systemet løses med hensyn til `xØ` og `a`, hvorfor disse to variable anbringes i "Tuborg-klammer".

Opgave 13

Lad $f(x) = \sqrt{ax + 8}$, hvor $a \in R$. Det oplyses, at grafen for *f* har tangenten $y = \frac{1}{2}x + 4$. Bestem *a*.

Opgave 14

Grafen til $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ har tangenten $y = 2x + a$, for $a \in R$. Bestem a. Der er to løsninger.

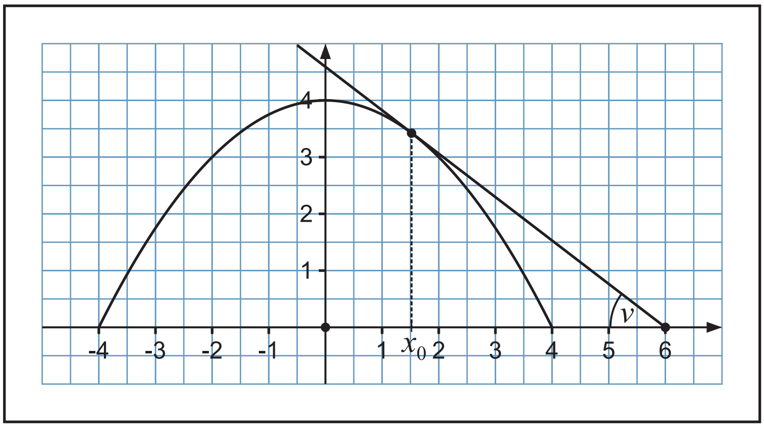
Opgave 15

Lad $f(x) = 4 \cdot \ln(x) - ax + 3$, hvor $a \in R$ er en konstant. Funktionen *f* har lokalt maksimum i $x = 2$. Bestem konstanten *a*.

Opgave 16

Givet funktionen $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2,\ \ x \in [-4,4]$. Grafen for *f* har en tangent, som passerer igennem punktet (6,0) på *x*-aksen. Betragt figuren nedenfor.

a) Bestem en ligning for tangenten.
b) Hvor stor er den vinkel (spidse), som tangenten danner med *x*-aksen?



Opgave 17

Lad $f(x) = \sin(2x) - \sin(x),\ \ -\pi \le x \le \pi$ (husk radianer). Funktionen kan i hovedskærmen indtastes: `sin(2x)-sin(x)|-π≤x≤π` og tildeles `f(x)`. Bemærk, at hvis man vil begrænse definitionsmængden, så er det smart at anvende *With*-operatoren $\boxed{|}$. Tastekombinationerne er her: $\boxed{|}\boxed{(-)}\boxed{2nd}[\pi]$ $\boxed{2nd}[<]\boxed{=}\boxed{X}$ $\boxed{2nd}[<]\boxed{=}$ $\boxed{2nd}[\pi]$.

a) Få grafregneren til at tegne grafen for *f* og lav en skitse af den.
b) Bestem hældningen for tangenten i punktet $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$.
c) Få grafregneren til at tegne grafen for $f'(x)$ idet du først får maskinen til at udregne den afledede funktion og tildeler den til en funktion `df(x)`. Benyt igen *With*-operatoren $\boxed{|}$ til at begrænse definitionsmængden til $-\pi \le x \le \pi$. Lav en lille skitse af grafen for $f'(x)$ fra grafvinduet.
d) Hvor stor er den største tangenthældning for *x* i intervallet $-\pi \le x \le \pi$?

Opgave 18

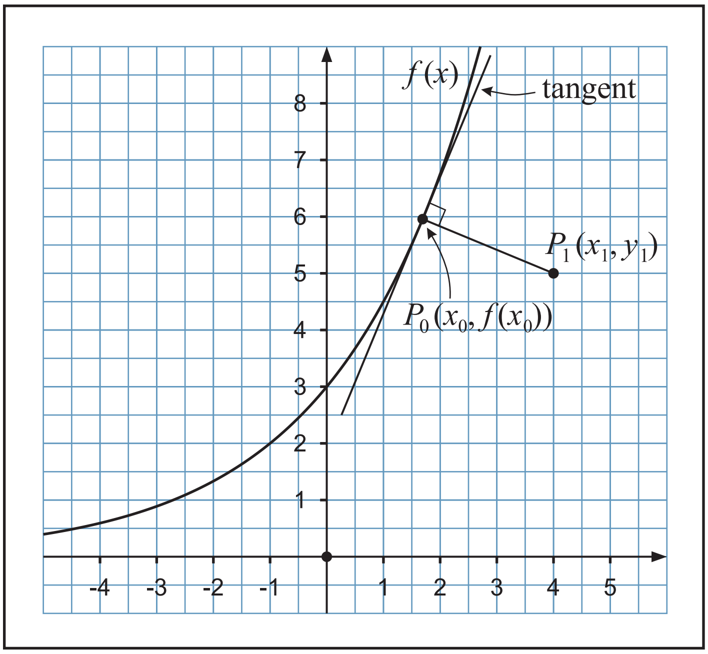
Lad $f(x) = \sqrt{2x-3}$ og $g(x) = 2x^2 - x + 6$. Angiv forskriften for den sammensatte funktion $(f \circ g)(x)$ og udregn $(f \circ g)'(x)$ i punkterne $x = -3,\ x = 1$ og $x = 5$.

Opgave 19

Lad $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{\sqrt{x+5}}$. Bestem definitionsmængde og monotoniforhold for *f*.

Opgave 20 (Meget svær opgave)

Med afstanden fra et punkt $P_1(x_1, y_1)$ til en kurve forstås den *mindste* afstand fra et kurvepunkt til punktet P_1. Man kan vise, at hvis *f* er differentiabel, så vil linjen fra P_1 til det grafpunkt $P_0(x_0, f(x_0))$, der ligger tættest på P_1, stå vinkelret på tangenten i det pågældende grafpunkt.



a) Vis, ved at tænke på en sætning om hældningskoefficienterne for to indbyrdes vinkelrette linjer, at der gælder følgende i det grafpunkt P_0, som ligger nærmest P_1:

$$\left(\frac{y_1 - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) \cdot f'(x_0) \;=\; -1$$

hvis altså $f'(x_0) \neq 0$.

b) Lad $f(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$, $x \in R$. Benyt formlen ovenfor samt grafregneren til at finde afstanden fra punktet $P_1(4,5)$ til grafen for *f*. *Hjælp*: Bemærk, at x_0 er ubekendt. Når den er bestemt, kan du benytte formlen for afstanden mellem to punkter.

c) Kan det tænkes, at der kan være flere løsninger til en ligning som den i spørgsmål a)? Overvej nogle grafforløb! Hvis der er flere løsninger, hvordan vil du så bestemme den mindste afstand?

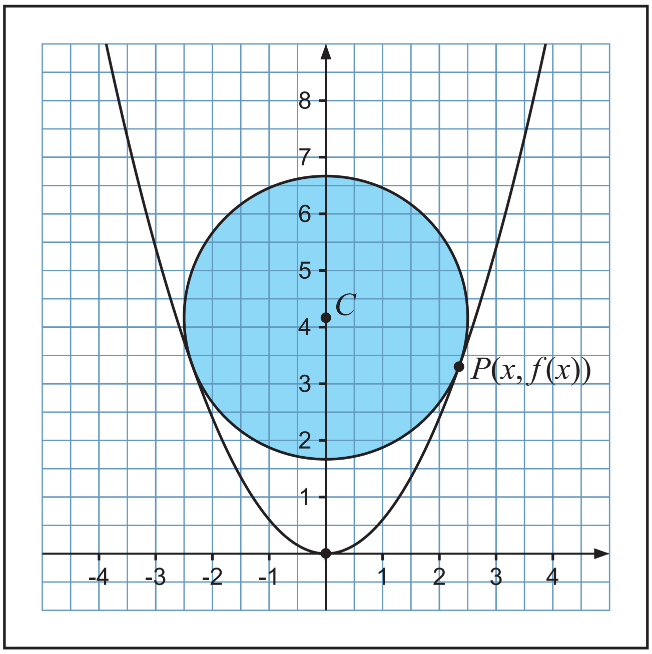
d) (Meget svær) Bevis påstanden i begyndelsen af denne opgave, dvs. at tangenten til grafen i det nærmeste punkt P_0 nødvendigvis må stå vinkelret på linjen gennem P_0 og P_1. *Hjælp*: Betragt *afstandsfunktionen* $d(x)$, som for ethvert *x* angiver afstanden fra P_1 til grafpunktet $(x, f(x))$:

$$d(x) \;=\; \sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - y_1)^2}$$

Denne funktion skal minimeres! Husk, at x_1 og y_1 er konstanter, altså bare tal!

Opgave 21 (Svær opgave)

En beholder har form som en *omdrejningsparaboloide*, fremkommet ved at rotere parablen med forskrift $f(x)=\frac{3}{5}x^2$ omkring y-aksen. En bold med radius 2,5 smides ned i beholderen. Hvor langt fra bunden vil boldens nederste punkt befinde sig, når bolden falder til ro? *Hjælp*: Betragt figuren til højre: Tag udgangspunkt i røringspunktet P med $(x, f(x)) = (x, \frac{3}{5}x^2)$ som koordinater. Udnyt, at radien PC står vinkelret på tangenten til grafen for f i punktet P. Opskriv en ligning og løs den ...



Opgave 22 (Gaffelforskrift)

Lad der være givet to funktioner:

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x + 4\,; \qquad g(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{for } -4 \le x \le 5 \\ 2x-13 & \text{for } x > 5 \end{cases}$$

Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

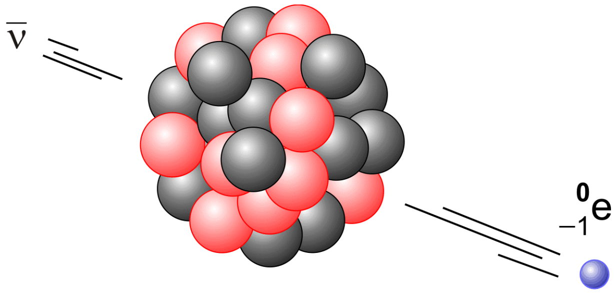
Hjælp: Indtastningen af $g(x)$ er lidt tricky. Man skal bruge `when`-sætningen, som har følgende syntaks: `when(`*betingelse*, *sandresultat*, *falskresultat*, *ukendtresultat*`)`. Hvis betingelsen er opfyldt, vælges *sandresultat*. Hvis betingelsen ikke er opfyldt, vælges *falskresultat*. Kan betingelsen ikke afgøres, vælges *ukendtresultat*. Man kan fint indsætte flere `when`-sætninger indeni hinanden. Det er faktisk nødvendigt her. Bemærk, at den sidste parameter kan udelades, men ikke den næstsidste: Ønsker man ikke funktionen defineret udenfor det ved betingelsen angivne interval, så kan man på pladsen for *falskresultat* skrive `undef`, som står for *udefineret* (Undefined). Tilbage til opgaven. Sørg for at der kommer til at stå følgende i [Y=]-editoren:

```
y1(x)=when(-4≤x≤5,-x+2,when(x>5,2x-13,undef))
```

Tegnet ≤ indtastes som [2nd][<][=]. Husk endvidere at bruge [(-)] som negativt fortegn! `when` kan eventuelt hentes via [CATALOG]. Den inderste `when`-sætning spiller her rollen af *falskresultat* i den yderste `when`-sætning. Overvej hvorfor dette faktisk definerer $g(x)$?

Opgave 23 (Fysik: radioaktivitet)

Et radioaktivt materiale indeholder atomkerner, som ikke er stabile. De ustabile, radioaktive kerner vil på et eller andet tidspunkt henfalde. At en kerne *henfalder* betyder, at kernen enten udsender elektromagnetisk stråling (γ-stråling) eller omdannes til en ny kerne under udsendelse af én eller flere partikler. α-henfald og β-henfald er eksempler på sidstnævnte. Ved et α-henfald udsender kernen en heliumkerne. Ved β-henfald omdannes en neutron i kernen til en proton, en elektron og en såkaldt *antineutrino*. Elektronen og antineutrinoen udsendes (se figur). Når radioaktiv stråling rammer et menneske vil det forårsage ioniseringer i cellernes atomer, hvilket kan være skadeligt.



Man kan ikke udtale sig om på hvilket tidspunkt en radioaktiv kerne henfalder, da det har noget med sandsynligheder at gøre! Da det radioaktive materiale imidlertid indeholder et meget stort antal radioaktive kerner, så betyder *De store tals lov*, at man alligevel kan forudsige med meget stor sikkerhed, hvad der vil ske. Den såkaldte *henfaldslov* siger, at antallet af *ikke-henfaldne* kerner vil aftage *eksponentielt* med tiden. Idet $N(t)$ angiver antallet af ikke-henfaldne kerner til tidspunktet t og N_0 antallet af ikke-henfaldne kerner til tidspunktet $t=0$, lyder henfaldsloven:

$$N(t) \;=\; N_0 \cdot e^{-k\cdot t}$$

hvor k er *henfaldskonstanten*.

a) Vis, at halveringstiden $T_{½}$ kan udregnes via formlen $T_{½} \;=\; \ln(2)/k$. Du kan løse opgaven i hånden eller evt. med grafregneren og anvende `solve` med hensyn til t. Det vil isolere t i ligningen. Husk at bruge $\boxed{-}$ som minus!

b) Det oplyses, at halveringstiden for Cæsiums-137 er 30 år. Bestem henfaldskonstanten med enheden år^{-1}.

En Cæsium-137 kilde indeholder $3{,}2\cdot 10^{19}$ radioaktive kerner til tiden $t=0$.

c) Hvor mange radioaktive kerner vil der være efter 17 år?

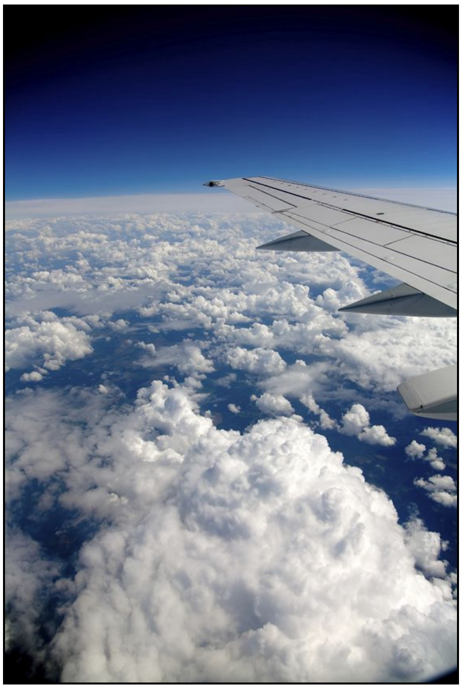
d) Hvornår er antallet af radioaktive Cs-137 kerner nede på $1{,}7\cdot 10^{18}$?

e) *Aktiviteten* af en radioaktiv kilde er matematisk defineret som $A(t) = -N'(t)$. Bestem et udtryk for $A(t)$, med de aktuelle værdier for k og N_0.

f) Hvad fortæller aktiviteten, sagt med ord?

g) Aktiviteten regnes i enheden Bq (Becquerel). Hvornår er kildens aktivitet reduceret til 10% af dens oprindelige aktivitet?

Opgave 24 (Geofysik: atmosfæren)



Som bekendt aftager trykket *p*, når man bevæger sig opad i atmosfæren. Det samme gør luftens densitet ρ. I det følgende skal vi se på en model for situationen. For fuldstændighedens skyld vil vi kort studere modellens baggrund. Teorien kan overspringes, hvis det ønskes. Man kan opstille to ligninger:

$$\rho = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}\,; \qquad p'(h) = -\rho \cdot g$$

Førstnævnte er blot en densitetsudgave af *tilstandsligningen for en ideal gas* ($p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, $\rho = m/V$ og $M = m/n$). Den anden ligning er den såkaldte *hydrostatiske ligning*, som fås ved at studere, hvor meget et lille luftlag bidrager med til trykket.

Her er $M = 0{,}02896\ \text{kg/mol}$ molarmassen af den atmosfæriske luft, *T* er temperaturen i Kelvin, $R = 8{,}3145\ \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ er gaskonstanten og $g = 9{,}82\ \text{m/s}^2$ er tyngdeaccelerationen. Tilsammen giver disse to ligninger anledning til følgende differentialligning:

$$p'(h) = -\frac{M \cdot g \cdot p}{R \cdot T}$$

Man antager, at atmosfæren har samme sammensætning i alle højder, så *M* kan antages konstant. Hvis man ydermere antager, at temperaturen og tyngdeaccelerationen ikke ændrer sig ved opstigning, så får man følgende løsning til problemet:

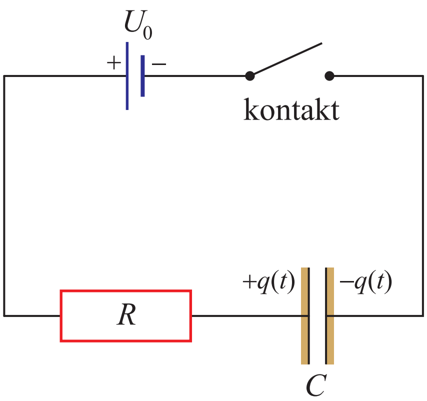
$$p(h) = p_0 \cdot e^{-M \cdot g \cdot h/(R \cdot T)}$$

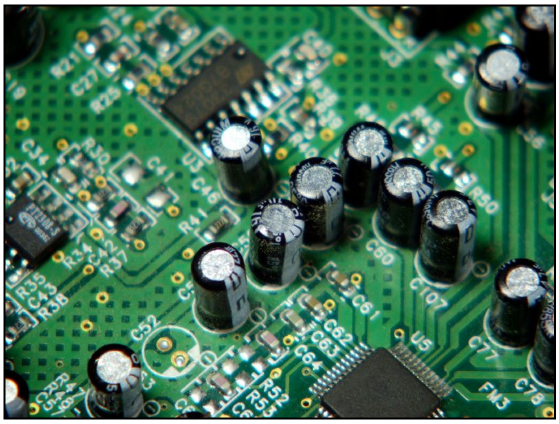
Det skal lige nævnes, at specielt de sidste to antagelser ikke er realistiske, specielt ikke den med temperaturen. I den nederste del af atmosfæren aftager temperaturen en del med højden. Alligevel viser modellen sig ret god især i den nederste del af atmosfæren. Ønskes en mere præcis model, må man regne med, at *T* og *g* varierer. Det gøres i den såkaldte *standard atmosfære*. Ikke mere herom. Nedenfor vil vi grundet modellen antage, at temperaturen er 0°C, dvs. $T = 273\ \text{K}$, i alle højder, upåagtet, at temperaturen på toppen af Mount Everest fx typisk vides at ligger mellem –19°C og –36°C.

a) Benyt modellen ovenfor til at bestemme trykket på Mount Everest, som er 8848 meter højt. Det oplyses, at trykket ved jorden er $p_0 = 101325\ \text{Pa}$.
b) Hvor højt skal man op før trykket halveres?
c) I hvilken højde er trykket 80000 Pa?
d) Benyt grafregneren til at finde et udtryk for $p'(h)$.
e) Bestem $p'(1000)$. Hvad fortæller denne størrelse, sagt med ord?

Opgave 25 (Fysik: elektronik)

En *kapacitor* er en elektrisk komponent, som udnyttes i megen elektronik. På billedet til højre er vist en række kapacitorer anbragt på et lydkort til en computer. Komponenten er i stand til at oplagre *ladning*. Denne egenskab er vigtig i mange sammenhænge. Et godt eksempel er en kamera flash, hvor den elektriske energi, som er oplagret i en kapacitor, fyres af på én gang! Spændingen U over en kapacitor er proportional med den ladning Q, som er ophobet på hver side i (plade-)kapacitoren. Proportionalitetsfaktoren kaldes *kapacitansen* og betegnes med C: $Q = C \cdot U$. Jo større kapacitans, jo mere ladning kan ophobes. Enheden for kapacitans er F (*Farad*). Enheden for ladning er C (*Coulomb*). På figuren nedenfor til venstre er vist en resistans R sat i serie med en kapacitor C. Kredsløbet kaldes derfor for et RC-kredsløb. Vi antager, at vi har at gøre med en perfekt spændingskilde – med fast spænding U_0 og uden indre modstand.





Når man via en kontakt slutter kredsløbet, så vil der foregå en opladning af de to plader i kapacitoren, med en ladning $+q(t)$ på den ene side og $-q(t)$ på den anden. Bemærk, at ladningen er en funktion af tiden t. Man kan opstille en såkaldt differentialligning og derved løse problemet med, hvordan ladningen vokser. Det viser sig, at den er givet ved følgende udtryk, hvor $Q_0 = C \cdot U_0$:

$$q(t) \;=\; Q_0 \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad \text{(Opladning af en kapacitor)}$$

a) Indtast forskriften for $q(t)$ i hovedskærmen via HOME og tildel forskriften til $q(t)$ via STO▸. Du kan bare kalde parametrene Q_0, R og C for henholdsvis `qØ`, `r` og `c`, men husk parenteser og gangetegn imellem størrelserne! Når du så i spørgsmål b) skal udregne $q(t)$ for nogle konkrete værdier for Q_0, R og C, så kan du blot tildele disse værdier til de respektive parametre via STO▸ i hovedskærmen.

b) Antag, at vi har et kredsløb med en resistor med resistansen $1\,\mathrm{M}\Omega = 1 \cdot 10^6\,\Omega$ og en kapacitor med kapacitansen $C = 5\,\mu\mathrm{F} = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$. Lad spændingskilden levere en fast spænding på $U_0 = 24\ \mathrm{V}$. Hvor stor er ladningen efter 4 sek.?

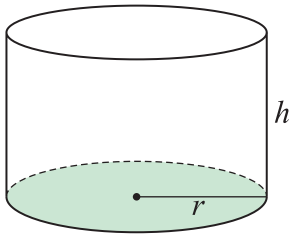
c) Hvad sker der med ladningen, når $t \to \infty$? Tegn grafen for $q(t)$. Som vindue kan du vælge: $\text{xmin} = 0$; $\text{xmax} = 30$; $\text{ymin} = 0$; $\text{ymax} = 0.0002$. Beskriv kurven!

d) Hvornår er ladningen nået op på $1{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}$?

e) Benyt grafregneren til at finde *strømstyrken*, som er ladning pr. tid: $i(t) = q'(t)$.

Opgave 26

En virksomhed ønsker at fremstille en cylinderformet beholder, som både har en bund og et låg, foruden den krumme overflade. Virksomheden oplyser, at beholderens volumen skal være $0{,}6 \text{ liter} = 600 \text{ cm}^3$.



a) Hvor stor skal cylinderens højde være, hvis dens radius er 5 cm, for at beholderen får det rette volumen? Hvilket overfladeareal giver det anledning til?

En given radius r giver altså anledning til et bestemt overfladeareal, som vi vil betegne $O(r)$. Vi har altså at gøre med en *funktion*, hvor r er den variable.

b) Vis, at overfladearealfunktionen ser således ud:

$$O(r) \;=\; 2\pi r^2 + \frac{1200}{r}\,, \quad r > 0$$

Hjælp: Betingelsen om, at volumenet skal være 600 cm^3 giver en sammenhæng mellem r og h. Herved kan h udtrykkes ved r og indsættes i udtrykket for overfladearealet, så h forsvinder her, og man kun har at gøre med en funktion af én variabel.

c) Indtast i hovedskærmen i grafregneren funktionsudtrykket for arealfunktionen og tildel det til en funktion `o(r)`. Du kan eventuelt indbygge definitionsmængden i forskriften ved at tilføje `|r>Ø` efter selve funktionsudtrykket. *With*-operatoren $\boxed{|}$ er rigtig smart her.

d) Kontroller ved indsættelse af $r = 5$ i overfladearealfunktionen, at du får det samme svar for overfladearealet, som du fik i spørgsmål a). Benyt grafregneren hertil.

e) For hvilke radier opnår man et overfladeareal på 500 cm^2? Benyt grafregneren.

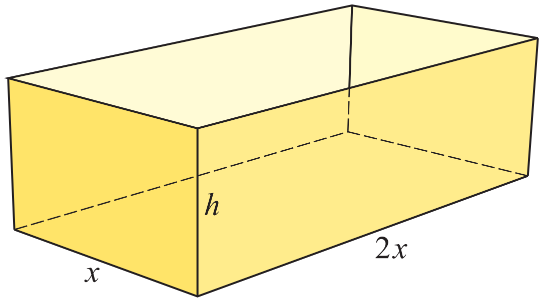
f) Vi er interesseret i at undersøge hvilken diameter, som vil minimere overfladearealet. Benyt grafregneren til at foretage en undersøgelse af monotoniforholdene for overfladefunktionen, og påvis, at funktionen har et lokalt og globalt minimum. bestem den radius, som giver det mindste overfladeareal og angiv arealet. Husk at lave en tallinje for $O'(r)$.

g) Nu oplyser virksomheden, at materialet i beholderens bund og låg koster 700 kr. pr. m^2, mens materialet til den krumme overflade kun koster 400 kr. pr. m^2. Bemærk, at 1 m^2 er det samme som 10.000 cm^2. Opskriv forskriften for en funktion $P(r)$, som angiver den samlede pris for beholderen som funktion af radius r.

h) Foretag en undersøgelse af funktionen $P(r)$, tilsvarende som i spørgsmål f), med henblik på at finde den radius, som virksomheden skal anvende, for at opnå den mindste pris for beholderen. Hvilken pris giver det?

Opgave 27

Der ønskes konstrueret en kasse med bund og sideflader, men uden låg. Den lange side i bunden skal være dobbelt så lang som den korte side i bunden. Endvidere skal kassen have et volumen på en liter, dvs. 1000 cm^3.



a) Hvor stor skal kassens højde være, hvis den korte side i bunden er 7 cm? Hvor stort er overfladearealet af kassen?

Lad os kalde den korte sidelængde i bunden for x. Så er den lange sidelængde i bunden $2x$. Højden af kassen betegnes h. Spørgsmål a) indikerer, at en given værdi for den korte sidelængde x giver anledning til et bestemt overfladeareal, som vi vil betegne $O(x)$. Vi har altså at gøre en funktion i x.

b) Vis, at overfladearealfunktionen ser således ud:

$$O(x) = 2x^2 + \frac{3000}{x}, \quad x > 0$$

Hjælp: Betingelsen om, at volumenet skal være 1000 cm^3 angiver en sammenhæng mellem x og h. Herved kan h udtrykkes ved x og indsættes i udtrykket for overfladearealet, så h forsvinder her, og man kun har at gøre med en funktion kun af én variabel.

c) Indtast i hovedskærmen i grafregneren funktionsudtrykket for arealfunktionen og tildel det til en funktion `o(x)`. Du kan eventuelt indbygge definitionsmængden i forskriften ved at tilføje `|x>0` efter selve funktionsudtrykket. *With*-operatoren $\boxed{|}$ er rigtig smart her.

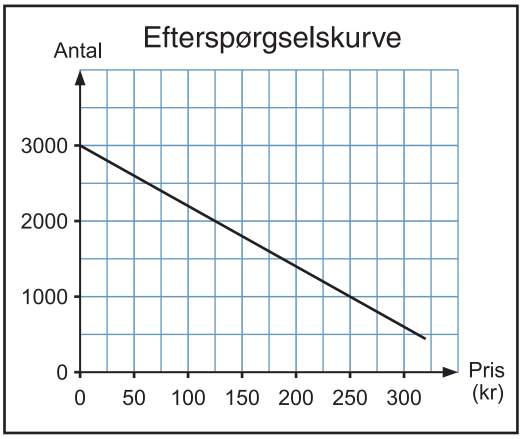
d) Kontroller ved indsættelse af $x = 7$ i overfladearealfunktionen, at du får det samme svar for overfladearealet, som du fik i spørgsmål a). Benyt grafregneren hertil.

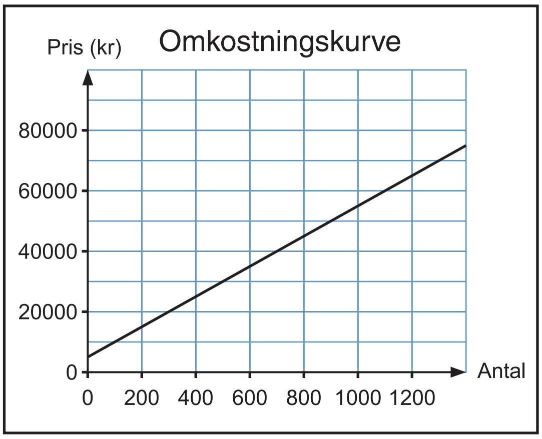
e) For hvilke korte sidelængder x opnår man et overfladeareal på 600 cm^2? Benyt grafregneren.

f) Vi er interesseret i at undersøge, hvilken værdi for x der vil minimere overfladearealet. Benyt grafregneren til at foretage en undersøgelse af monotoniforholdene for overfladefunktionen, og påvis, at funktionen har et lokalt og globalt minimum. bestem den værdi for x, som giver det mindste overfladeareal og angiv det tilhørende areal. Husk at lave en tallinje for $O'(x)$.

Opgave 28 (Økonomisk model)

I det følgende vil vi betragte en simpel økonomisk model for en virksomhed. Når en virksomhed forsøger at sælge sine varer, så er prisfastsættelsen et vigtigt tema at overveje. Sættes prisen lavt, så kan der sælges mange styk, men fortjenesten pr. styk vil være mindre. Sættes prisen højere, så kan der normalt ikke afsættes så meget, men man tjener mere pr. styk. Det store spørgsmål er, hvad den optimale stykpris er? – underforstået den stykpris, som giver den største fortjeneste. Til at besvare dette spørgsmål behøves blandt andet viden om efterspørgslen og omkostningerne.





For at simplificere problemstillingen antager vi, at alle de producerede enheder sælges. Antal producerede enheder og antal solgte enheder er altså det samme. Vi antager, at efterspørgselsfunktionen, som angiver antal styk, x, er en lineært aftagende funktion af stykprisen p:

$$x = 3000 - 8 \cdot p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{3000 - x}{8}$$

Omkostningerne kan deles op i de *variable omkostninger* og de *faste omkostninger*. De variable omkostninger afhænger af antal producerede enheder, og vi vil her antage, at de variable omkostninger er proportionale med antal producerede enheder: 80 kr. pr. enhed. De faste udgifter sættes her til 5000 kr. Vi har altså følgende *omkostningsfunktion*: $O(x) = 80 \cdot x + 5000$. *Indtægtsfunktionen* fås ved at multiplicere antal solgte enheder med salgsprisen pr. enhed: $I(x) = x \cdot p = x \cdot (3000 - x)/8$. Da fortjenesten er lig med indtægter fratrukket omkostninger, fås følgende *fortjenestefunktion*:

$$F(x) \;=\; I(x) - O(x) \;=\; x \cdot \left(\frac{3000 - x}{8} \right) \;-\; (80 \cdot x + 5000)$$

a) Foretag en funktionsundersøgelse af fortjenestefunktionen. Hvad er den optimale stykpris at sætte på varen, og hvor mange enheder skal der produceres? Hvor stor er den samlede fortjeneste?
b) Størrelserne $I'(x)$ og $O'(x)$ betegnes henholdsvis *marginalindtægterne* og *marginalomkostningerne*. Bestem de to størrelser for en produktion på 800 enheder. Hvad siger de to størrelser noget om, sagt med ord?
c) Bestem marginalindtægterne og marginalomkostningerne for det antal enheder, som giver den optimale fortjeneste, bestemt i spørgsmål a). Hvad konkluderer du?
d) Kan en voksende efterspørgselskurve tænkes? Diskutér!

Opgave 29 (Økonomisk model)

Med betegnelserne fra forrige opgave: Lad efterspørgslen ved en vare være givet ved formlen $x = 1000000 \cdot p^{-1,5}$, hvor x er det antal enheder, som kan sælges til stykprisen p. Lad endvidere $O(x) = 0,00005x^3 - 0,12x^2 + 100x + 10000$ være omkostningsfunktionen.

a) Tegn efterspørgselskurven på grafregneren – dvs. antal solgte enheder x som funktion af prisen p – idet du vælger et vindue, så $0 \le p \le 100$ og $0 \le x \le 10000$. Beskriv grafens udseende med ord: Kan den retfærdiggøres? Giv en praktisk forklaring på, hvorfor en efterspørgselskurve kan se således ud!
b) Beregn funktionen, som angiver salgsprisen pr. styk, p, som funktion af antal solgte enheder, x.
c) Angiv et udtryk for indtægtsfunktionen $I(x)$.
d) Tegn på grafregneren graferne for indtægtsfunktionen og omkostningsfunktionen, idet du vælger vinduet $0 \le x \le 2000$ og $0 \le y \le 150000$. Beskriv graferne med ord. Hvilke aspekter ved en produktion kan få graferne til at se således ud?
e) Angiv et udtryk for fortjenestefunktionen $F(x)$ og tegn dens graf i samme vindue som i spørgsmål d). Bestem det antal producerede enheder, som giver den maksimale fortjeneste. Hvad er den maksimale fortjeneste? Hvad er den optimale salgsprisen pr. vare?

Opgave 30 (Økonomi: priselasticitet)

Efterspørgselsfunktionen $A(p)$ er den funktion, som givet en stykpris p på varen, angiver hvor mange vareenheder, som kan afsættes til den pågældende pris. I de to opgaver ovenfor er denne størrelse blot angivet ved x. Undertiden er man i økonomi interesseret i, hvor følsom salget er overfor en prisforøgelse. Lad os sige, at vi giver prisen en tilvækst på Δp. Vi kan da betragte følgende størrelse:

$$\frac{\text{Relativ ændring i efterspørgslen}}{\text{Relativ ændring i prisen}} = \frac{\dfrac{A(p+\Delta p)-A(p)}{A(p)}}{\dfrac{\Delta p}{p}} = \frac{A(p+\Delta p)-A(p)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{A(p)}$$

Hvis $A(p)$ er differentiabel, så har sidstnævnte udtryk en grænseværdi for $\Delta p \to 0$, og denne grænseværdi betegnes den øjeblikkelige *priselasticitet*: $E(p) = A'(p) \cdot p / A(p)$. Afsætningen kaldes *uelastisk*, *neutralelastisk* eller *elastisk* alt efter om $|E(p)|$ er mindre end 1, lig med 1 eller større end 1.

a) Beregn priselasticiteten for tilfældet med efterspørgselsfunktionen i opgave 28, når $p = 150$ kr. Hvad er den beregnede priselasticitet et udtryk for sagt med ord?

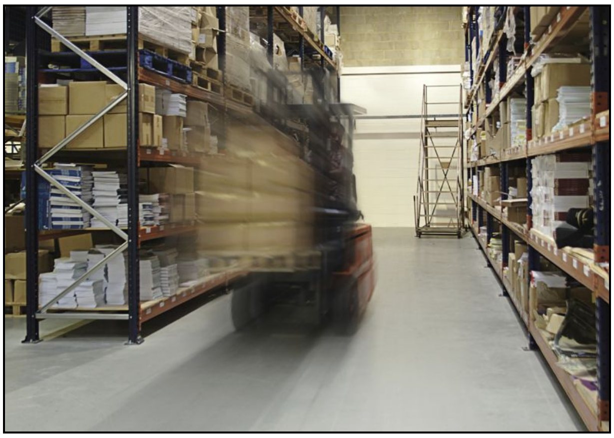
b) Hvad har størst elasticitet, tror du?: Almindelige fødevarer, luksusvarer, varer der kan erstattes af andre varer? Argumenter!

Det bemærkes, at priselasticiteten er *uafhængig* af de valgte enheder, fx valuta!

Opgave 31 (Økonomi: lagerstyringsmodel)

Lagerstyring er et vigtig område i organiseringen af en virksomhed. På den ene side koster det mange penge at have et stort lager, på den anden side koster det ekstra at få tilsendt nye forsyninger i mange forsendelser frem for et lille antal, selv om den totale leverance er den samme. Spørgsmålet er hvilke ordrestørrelser, der er de optimale for virksomheden, så firmaets totale lageromkostninger bliver så små som mulig. Indenfor faget *Erhvervsøkonomi* arbejder man med en klassisk model for lagerstyring, som fører frem til den såkaldte *Wilsons formel* for den optimale ordrestørrelse. Den skal vi se på i det følgende. Vi arbejder i modellen med følgende størrelser:

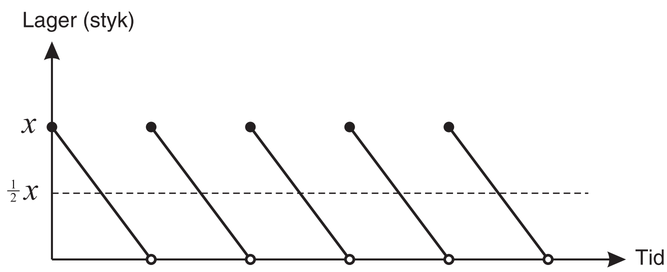
Totale årlige antal vareenheder:	V
Omkostninger pr. ordre:	F
Indkøbsprisen pr. vareenhed:	P
Lageromkostninger pr. enhed:	K
Ordrestørrelse:	x



Vi vil udregne lageromkostningerne under den antagelse, at lagersituationen over tid er som beskrevet på figuren nedenfor til højre. I gennemsnit er der $\frac{1}{2}x$ vareenheder på lager.

Vi får:

Antal ordrer pr. år:	V/x
Totale kostpris:	$V \cdot P$
Ordreomkostninger:	$F \cdot V/x$
Lageromkostninger:	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot K$



$$\begin{aligned}\text{Totale omkostninger} &= \text{Totale kostpris} + \text{ordreomkostninger} + \text{lageromkostninger} \\ &= V \cdot P \;+\; F \cdot \frac{V}{x} \;+\; \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot K\end{aligned}$$

a) Påvis rigtigheden af udtrykkene for antal ordrer pr. år, den totale kostpris, ordreomkostningerne samt lageromkostningerne.
b) En virksomhed regner med at indkøbe og sælge i alt 1920 kaffemaskiner på et år. Hver kaffemaskine koster i indkøb 175 kr. Udgifterne til hver ordre andrager 750 kr., mens det koster 50 kr. at have lagret én kaffemaskine i et år. Vis, at følgende udtryk angiver de totale (årlige) omkostninger, som funktion af ordrestørrelsen x:

$$f(x) = 336.000 + \frac{1.440.000}{x} + 25x$$

Lad funktionen g angive summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne:

$$g(x) = \frac{1.440.000}{x} + 25x$$

Da funktionerne f og g kun adskiller sig fra hinanden ved kostprisen, som ikke afhænger af x og dermed er en konstant, vil grafen for f blot være en parallelforskydning af grafen for g. Det betyder, at funktionerne har samme monotoniforhold og har de samme lokale ekstremumssteder.

c) Hvor stor vil summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne være ved ordrestørrelser på henholdsvis 100 og 500 styk?
d) Foretag en funktionsundersøgelse af $f(x)$, idet du bestemmer monotoniforhold, og lokale ekstrema. Hvad er den optimale ordrestørrelse?
e) Tegn grafen for ordreomkostningerne, lageromkostningerne og summen af dem i samme koordinatsystem. Anvend gerne grafregneren eller et andet program. Beskriv de to førstnævnte grafers forløb og prøv at forstå, hvorfor de ser ud, som de gør. Bestem skæringspunktet for disse to grafer. Hvad observerer du?
f) Gå tilbage til det generelle udtryk for de totale (årlige) omkostninger og bevis *Wilsons formel* for den optimale ordrestørrelse:

$$\text{Optimal ordrestørrelse} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot V}{K}} \qquad (\textit{Wilsons formel})$$

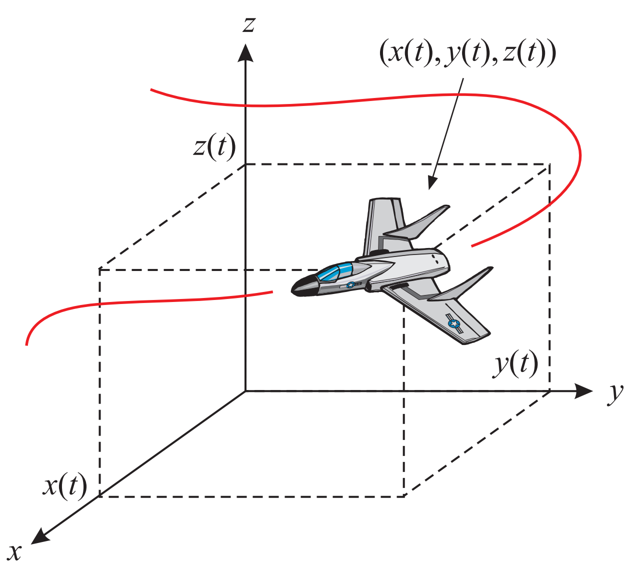
Passer den optimale ordrestørrelse udregnet i spørgsmål d) med det, du får, ved at indsætte i denne formel?
g) Analyser hvordan den optimale ordrestørrelse givet ved Wilsons formel påvirkes, når lageromkostningerne pr. enhed, K, øges – og de andre størrelser fastholdes.
h) Overvej rimeligheden i de antagelser, som ligger til grund for ovenstående model for lagerstyring. Diskuter herunder forskellige typer varer. Kom også ind på grafen, som viser lagersituationen som funktion af tiden. Er den rimelig? Kan man forestille sig andre? Du kan eventuelt betragte en anden model og analysere den matematisk.

Opgave 32 (Bevægelse)

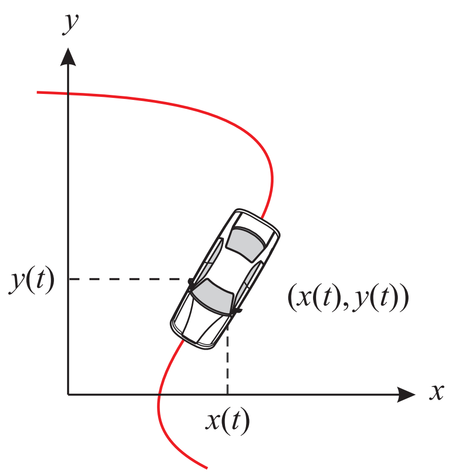
En af grundede til, at differentialregning spiller så stor en rolle i fysik er, at den afledede funktion dukker op på naturlig måde i så mange sammenhænge. Et af de mest lysende eksempler herpå er indenfor *bevægelse*, som er et underemne til emnet *mekanik*. Vi skal se, hvordan *hastigheden* fås ved at differentiere *stedfunktionen* og hvordan *accelerationen* fås ved at differentiere hastighedsfunktionen.

Første spørgsmål er, hvordan vi i det hele taget skal beskrive en bevægelse. Er der tale om et *fly*, som kan bevæge sig i 3 *dimensioner*, er der brug for et koordinatsæt bestående af tre koordinater: $(x(t), y(t), z(t))$. Hver koordinat er en *funktion* af t, svarende til at flyet, eller snarere dets tyngdepunkt, befinder sig forskellige steder til forskellige tidspunkter. Udover de tre koordinater kunne man også overveje at have nogle yderligere funktioner, som beskriver flyets stilling i forhold til tyngdepunktet. Vi vil dog ikke komme nærmere ind på dette her. På figur 2 har vi en bil, som bevæger sig rundt i en *plan*, altså bevæger sig i 2 dimensioner. For at beskrive positionen af bilens tyngdepunkt, kræves et koordinatsæt bestående af 2 koordinater: $(x(t), y(t))$. Når vi arbejder med en bevægelse, hvori der er flere koordinater, som hver er en funktion af tiden t, så siger vi, at vi har at gøre med en *vektorfunktion*. Vi vil komme ind på emnet senere i matematik. I denne opgave skal vi imidlertid kun beskæftige os med bevægelse i 1 dimension, som vist på figur 3. En bil bevæger sig ud af en lige vej, og der skal bare én funktion til at beskrive bilens position: $x(t)$. Ofte vil vi dog også betegne denne funktion med $s(t)$, *stedfunktionen*.

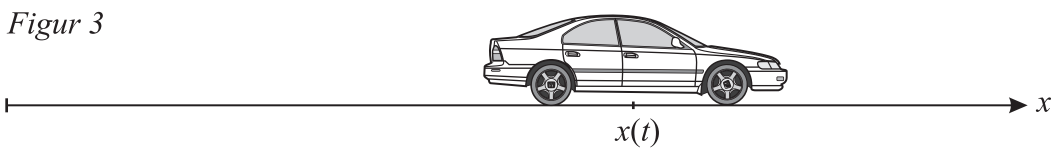
Figur 1



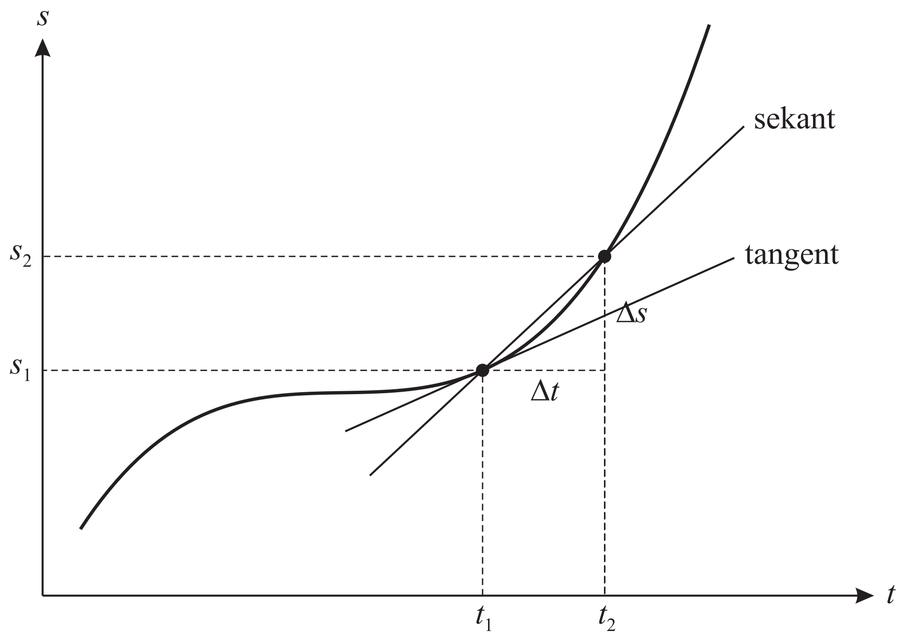
Figur 2



Figur 3



Bemærk, at vi også kun har at gøre med en bevægelse i 1 dimension, hvis den bane, bilen bevæger sig ad, er en krum fastlagt kurve, som for eksempel en vej, og vi kun interesserer os for hvor langt ud af denne kurve bilen er kommet til et givet tidspunkt og hvilken hastighed bilen har i denne bevægelse. Man kan forestille sig, at vi har lagt et målebånd ud langs med den krumme vej ...



Har man bilens position til ethvert tidspunkt t, har man bilens såkaldte *stedfunktion*, $s(t)$. Dens graf betegner vi bevægelsens (t,s)-graf. *Gennemsnitshastigheden* v_g i tidsrummet fra t_1 til t_2 fås ved at dividere den strækning $\Delta s = s_2 - s_1$, som bilen har tilbagelagt, med tidsrummets længde $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$v_g \;=\; \frac{\Delta s}{\Delta t} \;=\; \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Det ses, at det svarer til at finde *hældningen* af *sekanten* igennem punkterne (t_1, s_1) og (t_2, s_2) på sted-grafen. Man kan også tale om en hastighed til et bestemt tidspunkt, den såkaldte *øjeblikshastighed*. For at fastlægge den, er det nødvendigt at kende bevægelsen i et lille tidsrum omkring tidspunktet. Hvis man på figuren ovenfor lader tidspunktet t_2 nærme sig til tidspunktet t_1, så vil gennemsnitshastigheden i tidsrummet $\Delta t = t_2 - t_1$ som regel nærme sig til et bestemt tal, og dette tal vil vi kalde hastigheden til tidspunktet t_1, dvs. $v(t_1)$:

$$v_g \;=\; \frac{\Delta s}{\Delta t} \;=\; \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \;\to\; v(t_1) \;\text{ for }\; t_2 \to t_1$$

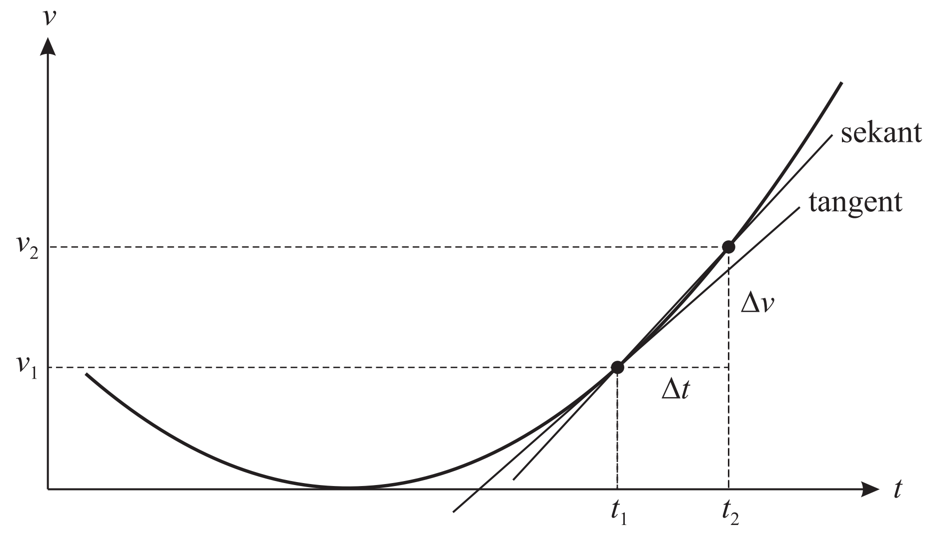
Dette er ikke så mærkeligt, for når tidsrummet gøres meget lille, så kan bilen stort set ikke nå at ændre hastighed indenfor tidsrummet og øjeblikshastigheden vil så stort set være lig med gennemsnitshastigheden i tidsrummet. Da gennemsnitshastighederne er lig med hældningskoefficienterne af sekanterne, og da sekanterne nærmer sig til *tangenten* i punktet (t_1, s_1), så er øjeblikshastigheden $v(t_1)$ til tidspunktet t_1 lig med *hældningen af* *tangenten* i punktet (t_1, s_1). Sagt på en mere matematisk måde: Hvis sted-funktionen $s(t)$ er differentiabel i t_1, dvs. hvis differenskvotienten $\Delta s / \Delta t$ har en grænseværdi for $t_2 \to t_1$, så er grænseværdien lig med øjeblikshastigheden i t_1, som igen er lig med differentialkvotienten i t_1: $v(t_1) = s'(t_1)$. Dette kan man gøre for ethvert tidspunkt t_1. Den afledede funktion til stedfunktionen $s(t)$ er altså *hastighedsfunktionen* $v(t) = s'(t)$. Grafen for denne hastighedsfunktionen betegnes $(t, v) -$ grafen .

En tilnærmet værdi for en bils øjeblikshastighed kan altså findes ved at bestemme bilens gennemsnitshastighed i et lille tidsrum omkring det betragtede tidspunkt. Dette faktum bruges undertiden til at kontrollere om biler overholder hastighedsbegrænsningerne i byerne: På en vej udlægger man to kabler med en lille afstand Δs imellem, og noget udstyr måler, hvor lang tid Δt bilens forhjul er om at komme fra det første kabel til det andet! En god værdi for øjeblikshastigheden er da $\Delta s / \Delta t$. I dag benytter man også andre metoder til hastighedsbestemmelse, fx laserstråler.

Det skal også lige nævnes, at vi i definitionen ovenfor regner hastigheder *med fortegn*, forstået på den måde, at hvis bilen kører *tilbage* i banen, så er hastigheden negativ. Når man i fysik bruger begrebet *fart*, så menes *størrelsen af hastigheden*; i dette tilfælde den numeriske værdi af hastigheden.

Nu til begrebet *acceleration*. De fleste ved, at når en bil øger sin hastighed, så accelererer den. Acceleration er egentligt bare *hastighedsændring pr. tid*. En nøjagtig definition fås ved at gentage hvad vi gjorde ovenfor for $(t, s) -$ grafen , nu blot for $(t, v) -$ grafen : Først indføres *gennemsnitsaccelerationen* a_g som sekanthældningen og derefter *øjebliksaccelerationen* som grænseværdien af differenskvotienten for $t_2 \to t_1$. Det betyder, at *accelerationsfunktionen* fås som den afledede af hastighedsfunktionen: $a(t) = v'(t)$. Grafen betegnes $(t, a) -$ grafen .

$$a_g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \qquad a(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = v'(t_1)$$



Poul og Lise kører en tur beskrevet ved nedenstående (t,s)-graf.

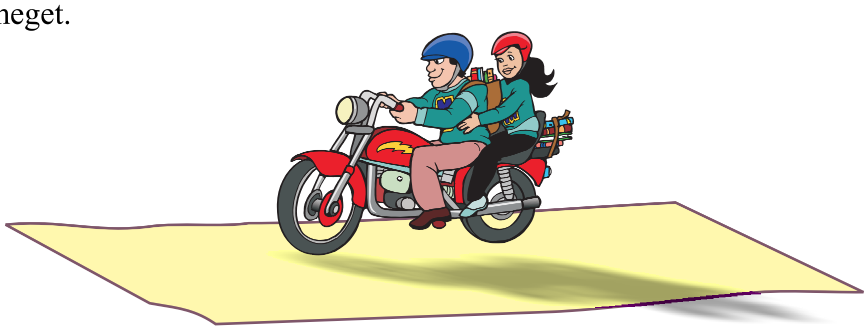
a) Prøv at vurdere, hvordan hastigheden har varieret i løbet af de 10 minutters kørsel, idet du vurderer tangenternes hældning. Hvornår er hastigheden 0?

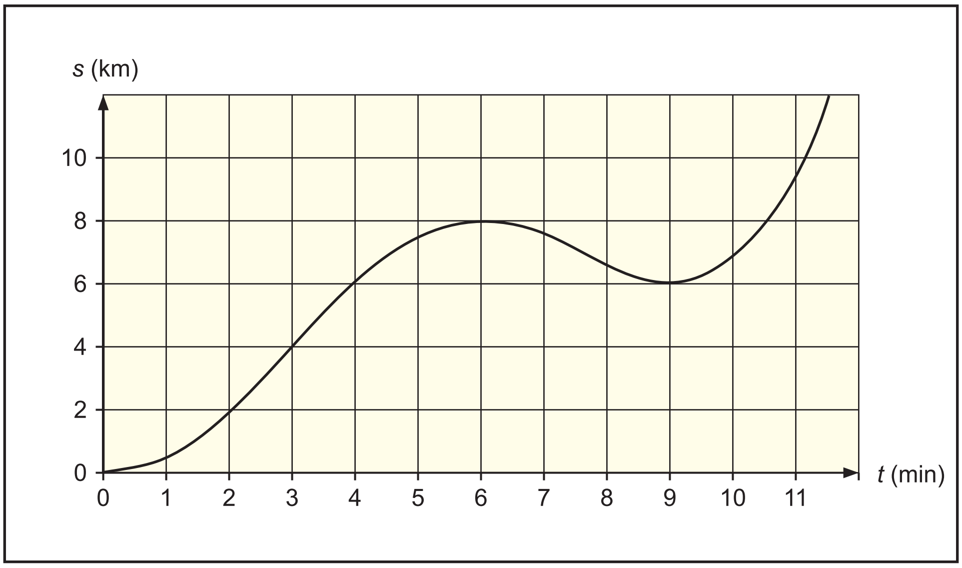
b) Hvad er hastigheden omtrent til tidspunktet $t = 3$ min?

c) Hvad er gennemsnitshastigheden i tidsrummet fra 0 til 6 minutter?

d) Hvad foregår der i tidsrummet fra 6 til 9 min.?

e) Acceleration er hastighedsændring pr. tid. Prøv at vurdere, i hvilke tidsrum accelerationen har været høj, svarende til at hældningskoefficienten af tangenten ændrer sig meget.





Opgave 33 (Bevægelse)

Betragt bevægelsen beskrevet ved sted-funktionen $s(t) = 0,5t^3 - 5t^2 + 14t$ i følgende tidsrum: $0 \leq t \leq 8$. Tiden regnes i sekunder (s) og afstanden i meter (m).

a) Udregn hastigheds- og accelerations-funktionen.

b) Skitser $(t,s)-$grafen, $(t,v)-$grafen og $(t,a)-$grafen.

c) Til hvilke tidspunkter er hastigheden 0? Hvad kan du sige om $(t,s)-$grafen til disse tidspunkter?

d) Hvad er hastigheden til tidspunktet $t = 6$ sek?

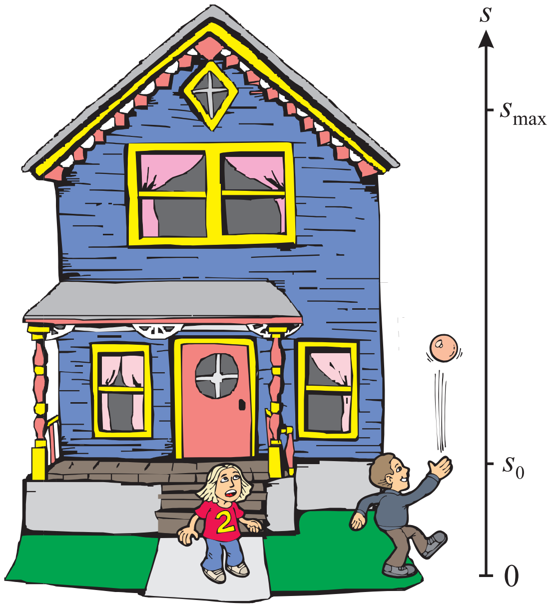
e) Hvornår er hastigheden 18 m/s?

f) Til hvilket tidspunkt er accelerationen 0? Hvad observerer du ved $(t,s)-$grafen til dette tidspunkt?

Opgave 34 (Bevægelse: det frie fald)

Mikkel og Marie spiller bold. Mikkel kaster bolden lodret op i luften, således, at bolden, umiddelbart efter at den forlader Mikkels hånd, har en hastighed på 7,0 m/s. Håndens højde over jorden er 1,4 m, og der kan ses bort fra luftmodstand. Bevægelsen kan klart beskrives ved en bevægelsesligning i 1 dimension. Man kan vise, at der for et *frit fald* gælder følgende bevægelsesligning, hvor $g = 9{,}82\ \text{m/s}^2$ er tyngdeaccelerationen, v_0 er hastigheden til tiden $t = 0$ og s_0 er positionen til $t = 0$:

$$s(t) \;=\; -\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 + v_0\cdot t + s_0$$



Bemærk, at der er lagt en ”målestok” ind, som er 0 ved jorden og peger opad.

a) Indtast sted-funktionen på grafregneren. Du kan passende vælge $t = 0$ til at være det øjeblik, hvor bolden forlader Mikkels hånd. Tegn grafen for bevægelsen i et passende tidsrum og skitser grafen.
b) Få grafregneren til at bestemme hastighedsfunktionen. Skitser også dens graf.
c) Hvilken højde har bolden til tiden $t = 0{,}5$ sek.?
d) Bestem den maksimale højde s_{max}, som bolden opnår i bevægelsen, og bestem tidspunktet det sker på.
e) Bestem tidspunktet, hvor bolden rammer jorden.
f) Hvor stor er hastigheden umiddelbart før bolden rammer jorden? Hvordan tolker du fortegnet?
g) Bestem accelerationen i bevægelsen. Afhænger den af t? Undrer resultatet dig?

Opgave 35 (Biologi: logistisk vækst)

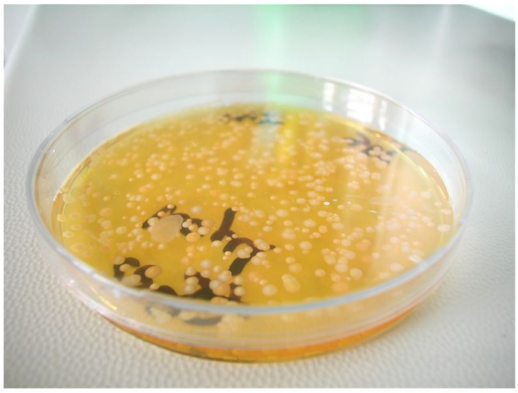
I modeller, som beskriver populationer, støder man ofte på den såkaldte *logistiske model*. Årsagen til, at den tages op i så mange forskellige sammenhænge er, at den bygger på nogle ret generelle forudsætninger. For bedre at forstå den, er det fornuftigt først at se på den mere simple *eksponentielle model*. Lad $n(t)$ repræsentere størrelsen af den aktuelle population. Den eksponentielle model udtrykker da, at hastigheden $n'(t)$, hvormed populationen vokser, er proportional med populationens størrelse: $n'(t) = k\cdot n(t)$. En meget naturlig antagelse: Hvis bestanden er dobbelt så stor, fødes der også dobbelt så mange nye individer, etc. Løsningen til denne ligning (differentialligning) er på formen $n(t) = b\cdot e^{k\cdot t}$. Det viser, at populationen under denne forudsætning vil udvikle sig eksponentielt. Imidlertid ved vi, at populationen ikke kan blive ved med at vokse i det uendelige. Ofte vil omgivelserne eller føden sætte en øvre grænse for, hvor stor populationen kan blive. Derfor indfører man en model, som kan tage hensyn til dette forhold. Den bygger på at hastigheden, hvormed populationen vokser, ikke blot er proportional med populationens egen størrelse, men også med hvor megen ”råderum”, der stadig er for vækst. Her gøres en antagelse om, at populationens grænse er en eller anden værdi G. Den logistiske model bygger altså på følgende *logistiske differentialligning*:

$$n'(t) = k \cdot n(t) \cdot (G - n(t))$$

Man kan vise, at løsningen til denne differentialligning er:

$$n(t) \;=\; \frac{a \cdot G}{a + e^{-G \cdot k \cdot t}}$$

hvor a er en eller anden konstant, som afhænger af begyndelsesbetingelserne.



Der foretages et forsøg med nogle bakterier i en petriskål. Det viser sig, at populationen af bakterier udvikler sig, som angivet ved følgende funktion, hvor t regnes i timer:

$$n(t) \;=\; \frac{90}{0{,}1 + e^{-0{,}35 \cdot t}}$$

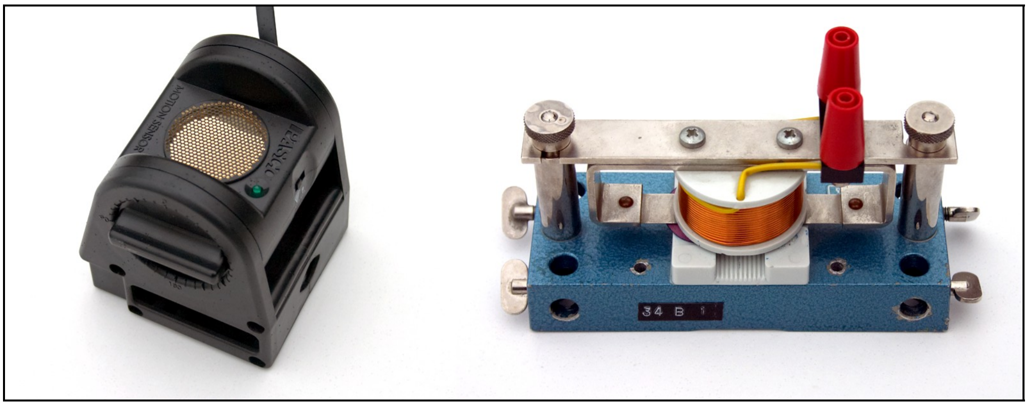
a) Undersøg udviklingen af bakterier over en 24 timers periode. Skitser grafen og forsøg at forklare grafen udfra teorien ovenfor: Hvorfor flader kurven ud? Hvorfor er væksten mindst i starten og til slut? Hvad sker der med populationen, når $t \to \infty$?
b) Hvor mange bakterier er der fra start og efter 5 timer?
c) Hvornår er populationen oppe på 800 bakterier?
d) Bestem differentialkvotienten $n'(t)$.
e) Bestem $n'(3)$ og fortæl, hvad den fortæller om bakteriekulturen.
f) Bestem et udtryk for n'/n som funktion af n . Tegn udtrykkets graf. Hvad fortæller det noget om?

Opgave 36

Betragt den logistiske vækst $n(t) \;=\; \dfrac{45}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t}}$. Tegn grafen og løs $n'(t) = 3{,}2$.

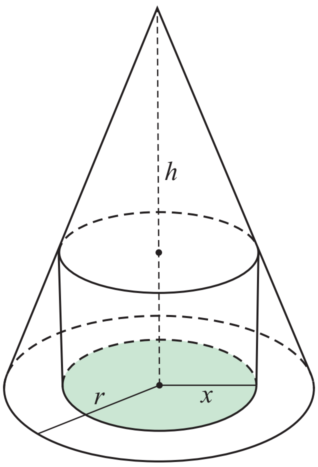
Opgave 37 (Bevægelse: projektopgave)

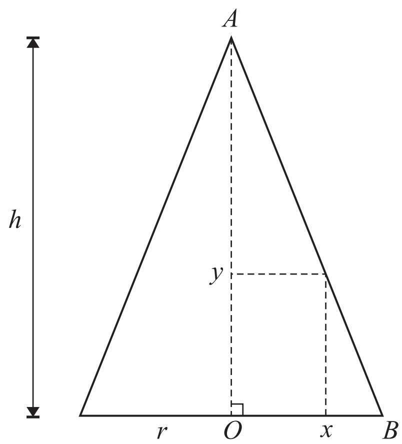
Fremskaf noget fysikudstyr, der kan måle bevægelser. Det kan være en gammeldags timer eller en mere nymodens *motionsensor*, der koblet til et interface og en computer kan registrere positionen af en genstand, som befinder sig over sensoren. *Science Workshop* eller et tilsvarende system er fint her. Du kan eventuelt også måle bevægelser med en *Smartpulley*. Når bevægelsen er optaget kan du tegne $(t,s)-\text{grafer}$ og $(t,v)-\text{grafer}$.



Opgave 38

En kegle har højden *h* og radius i grundcirklen er *r*.





a) Formlen for rumfanget af en kegle er $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$, hvor *h* er højden og *G* er grundfladearealet. Bestem keglens volumen, når $h = 10$ og radius er $r = 4$.

b) Lad *h* og *r* have de angivne værdier fra forrige spørgsmål. En cylinder placeres i centrum i bunden af keglen. Bestem radius af den cylinder, som har den største volumen. *Hjælp*: Læg et koordinatsystem ind med Origo i *O* og *x*-akse langs *OB* og *y*-akse langs *OA*. Kald radius i cylinderens bund for *x*. Bestem ligningen for linjen gennem *A* og *B* og udnyt den til at finde cylinderens maksimale højde *y* som funktion af *x*. Bestem herefter et udtryk for volumen af cylinderen, som funktion af *x*: $V(x)$. Foretag endelig en funktionsundersøgelse af $V(x)$ …

Opgave 39 (Sortlegeme-stråling og Plancks strålingslov)

Indenfor fysik findes der et begreb, som kaldes et *sort legeme*. Hermed menes et ideelt legeme, som har en overflade, der absorberer alle bølgelængder af den elektromagnetiske stråling, som rammer den. I ligevægt vil legemet udstråle den samme energi, som den absorberer. Det viser sig, at udstrålingen fra et sort legeme afhænger kraftigt af temperaturen. Intensiteten I stammende fra varmestråling fra et sort legeme er proportional med kelvintemperaturen T i fjerde potens:

$$I \;=\; \sigma \cdot T^4 \quad \text{(Stefan-Boltzmann's lov)}$$

hvor $\sigma = 5,67040 \cdot 10^{-8}\; W/(m^2 \cdot K^4)$ er *Stefan-Boltzmann-konstanten*. Hvis man ganger intensiteten med arealet A, får man dermed den udstrålede effekt P:

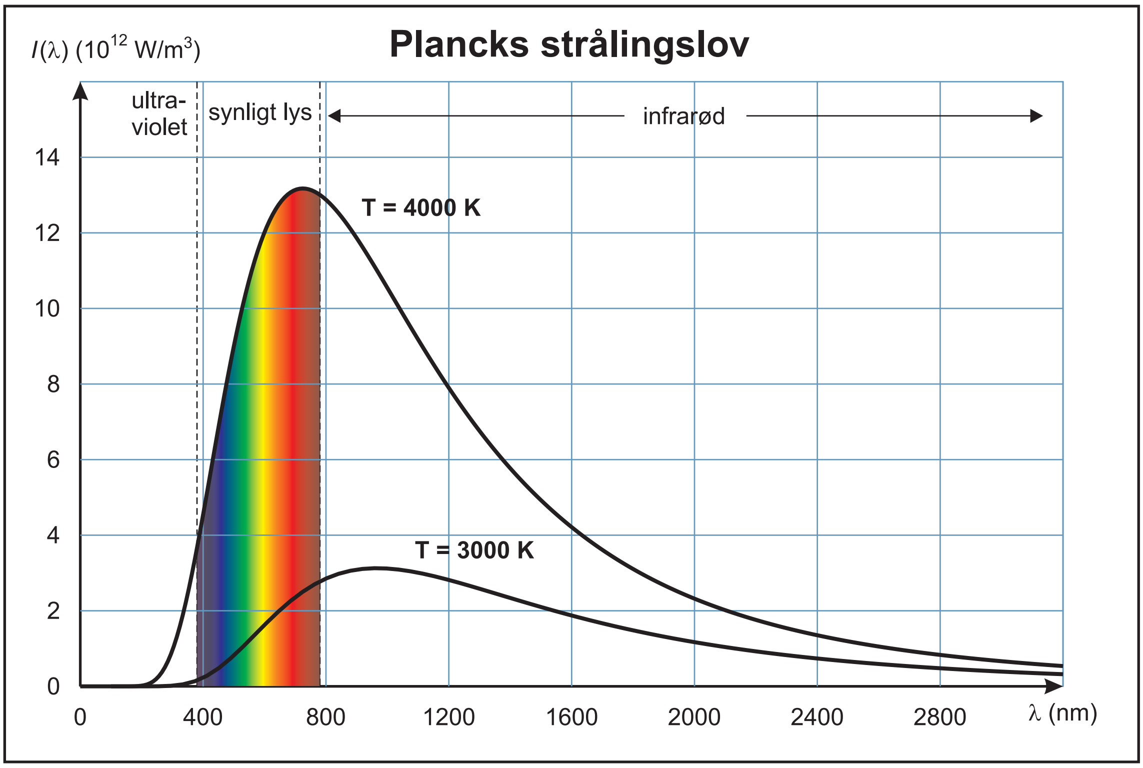
$$P \;=\; \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Sammenhængen blev opdaget eksperimentelt af *Josef Stefan* (1835 – 1893) i 1879 og begrundet teoretisk af *Ludwig Boltzmann* (1844 – 1906) fem år senere. Imidlertid er strålingens intensitet ikke fordelt uniformt (jævnt) over alle bølgelængder. I slutningen af 1800-tallet blev der gjort flere forsøg på at komme med en teoretisk begrundelse for de eksperimentelle og empiriske resultater, men først i år 1900 lykkedes det den tyske fysiker *Max Planck* (1858 – 1947) at udlede en funktion, kaldet *Plancks strålingslov*:

$$I(\lambda) \;=\; \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} \quad \text{(Plancks strålingslov)}$$

hvor $k = 1,380658 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ er *Boltzmanns konstant*, hvor $h = 6,626076 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ er *Plancks konstant* og $c = 2,99792458 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$ er lysets hastighed. På næste side er intensitetsfordelingen for temperaturerne 3000 K og 4000 K afbildet. Figuren viser også de bølgelængdeområder, hvor der er tale om ultraviolet stråling, synlig lys og infrarød stråling - alle typer er *elektromagnetisk stråling*. For det første registrerer man, at jo højere temperatur, jo større udstråling. Samtidigt indikerer graferne, at jo højere temperatur, jo lavere er bølgelængden for intensitetsmaksimum. Vi ser, at et sort legeme med en temperatur på 4000 graders Kelvin vil udstråle en lille del af sin stråling i det ultraviolette bølgelængdeområde, mens et legeme med temperaturen 3000 K næsten ikke afgiver ultraviolet stråling. Situationen med sortlegeme-stråling kan illustreres meget godt med en kogeplade: Hvis den er lidt varm, vil den udsende elektromagnetisk stråling i det infrarøde område, men ikke i det synlige. Hvis kogepladen bliver overophedet vil den først blive rødglødende og siden hvidglødende, hvis opvarmningen fortsætter.

a) Forsøg at give en forklaring på fænomenet.
b) Bestem den bølgelængde λ, som vil give den maksimale strålingsintensitet ved temperaturen $T = 4000\,\mathrm{K}$, ved at foretage en funktionsundersøgelse af $I(\lambda)$. NB! Det er en god idé at gemme de fysiske konstanter i nogle variable h, k, c og T.



Solen kan tilnærmelsesvist behandles som et sort legeme med temperaturen 5800 K.

c) Bestem den bølgelængde, som giver den maksimale intensitet.

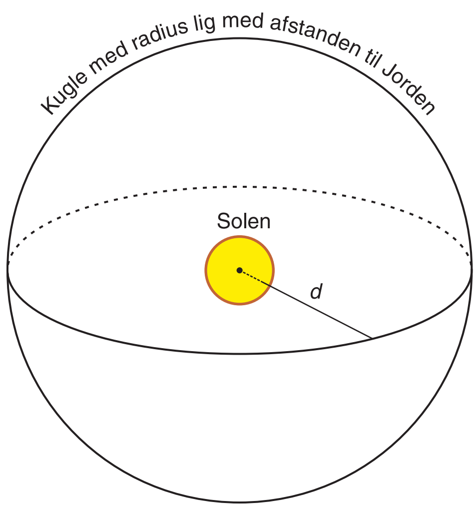
d) Benyt Stefan-Boltzmanns lov til at bestemme den totale udstrålede energi pr. kvadratmeter af Solen.

Vi kan benytte Stefan-Boltzmanns lov til at give en vurdering af temperaturen på Solens overflade, idet vi antager, at Solen kan betragtes som et sort legeme. Det oplyses, at man på Jorden har målt den såkaldte *Solarkonstant* til 1368 W/m^2. Det er en intensitet I_{Jord}, som angiver den effekt, som Solen afsætter på én kvadratmeter af Jorden, placeret vinkelret på stråleretningen. Solens radius er $R_{\text{sol}} = 6{,}9599 \cdot 10^8$ m og Jordens afstand til Solen er $d = 1{,}946 \cdot 10^{11}$ m.

Når energien fra Solen stråler ud vil energien spredes ud over et større areal. Derfor vil intensiteten aftage jo længere borte man befinder sig.

e) Argumenter for, at intensiteten I_{Sol} på Solens overfalde kan bestemmes af følgende formel:

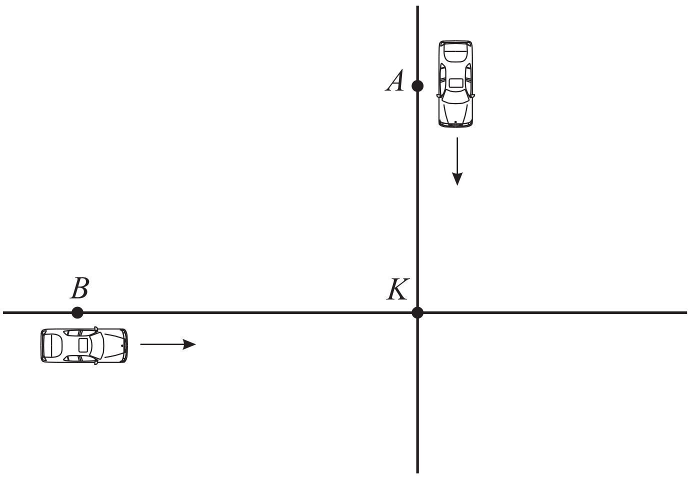
$$I_{\text{Sol}} = \left(\frac{d}{R_{\text{Sol}}} \right)^2 \cdot I_{\text{Jord}}$$



f) Benyt formlen i spørgsmål e) til at bestemme intensiteten på Solen og benyt derefter Stefan-Boltzmanns lov til at finde en værdi for temperaturen på overfladen af Solen. NB! Værdien passer meget præcist med den korrekte!

Opgave 40

To biler kører på hver sin vej hen imod et kryds *K*. Vejene står vinkelret på hinanden, som vist på figuren. Til tiden $t=0$ befinder den ene bil sig i punktet *A*, 2 km fra krydset, og bilen kører med farten 60 km/t hen imod krydset. Den anden bil befinder sig til $t=0$ i punktet *B*, 3 km fra krydset og bevæger sig med farten 40 km/t hen imod krydset. Opgaven er at bestemme det tidspunkt, hvor bilerne har den mindste indbyrdes afstand i fugleflugtslinje. *Hjælp*: Opstil et udtryk for de to bilers position som funktion af tiden *t* og bestem dernæst et udtryk for afstanden mellem de to biler, igen som funktion af *t*. Slut af med at lave en funktionsundersøgelse.



Opgave 41 (Blandede opgaver med værdimængde)

I de følgende opgaver skal du bestemme lokale ekstrema samt værdimængden for en funktion. I den forbindelse kan du blive nødt til at undersøge funktionsværdier i intervalendepunkter og/eller undersøge grænseværdier for funktionen.

a) $f(x)=0,3x^3-4x^2+5x+4\,,\ x\in[0,13]$

b) $f(x)=e^{-x}-x^2+2x\,,\ x\in R$

c) $f(x)\ =\ \dfrac{x-2}{e^{-x}+2}\,;\ x\in R$

d) $f(x)\ =\ \dfrac{x^2}{2x-4}\,;\ x>2$

e) $f(x)=x^4-8x^2+5x-14\,;\ x\in R$