

Arealet af en sfærisk trekant m.m.

Tillæg til side 103 – 104 i *Matematik højniveau 1* fra TRIP, af Erik Vestergaard.

Sfærisk tokant

Givet en kugle. En plan, der passerer igennem kuglens centrum, skærer kuglen i en såkaldt *storcirkel*. To forskellige storcirkler på kuglen afgrænser en *sfærisk tokant*. Den sfæriske tokant har to hjørner P og P' , som er *antipodiske* i forhold til hinanden, dvs. P og P' ligger diametralt modsat på kuglen. Per definition er hjørnernes vinkler P og P' lig med vinklen mellem de to planer, som indeholder omtalte storcirkler. Hvis man tegner en "ækvator" ind på kuglen, dvs. en storcirkel, så P og P' bliver "nordpol" og "sydpol" i forhold hertil, så er vinkel P (= vinkel P') lig med vinklen mellem vektorerne \vec{OA} og \vec{OB} , jævnfør figur 1 (Overvej hvorfor!). Vinkel P er i øvrigt også lig med vinklen mellem tangenterne til storcirklerne i punktet P : Se figur 2, hvor man kigger på kuglen fra en position "lodret" over punkt P – så P og P' ser ud til at falde sammen.

Tokanten er det skraverede område. Det er da ret klart, at *tokantens areal må forholde sig til hele kuglens areal som vinklen P forholder sig til 360 grader*. Hvis hele kuglens areal betegnes $F = 4\pi r^2$, hvor r er cirkelns radius, så må tokantens areal være lig med følgende:

$$(1) \quad a(PAP'B) = \frac{P}{360^\circ} F$$

Sfærisk trekant

Hvis man "cutter" en kugle med tre planer, der alle passerer igennem kuglens centrum, så frembringes i alt 8 *sfæriske trekanter*, som vi jævnfør figur 3 kan betegne:

$$(2) \quad \begin{array}{ll} ABC & A'B'C' \\ A'BC & AB'C' \\ ABC' & A'B'C \\ A'BC' & AB'C \end{array}$$

Til højre for hver sfærisk trekant i venstre søjle står den tilhørende "antipodiske trekant": Hjørnerne i den antipodiske trekant til en given trekant fås ved at udskifte hvert hjørne i den oprindelige trekant med det tilsvarende antipodiske punkt. Antipodiske trekanter er i øvrigt *kongruente*, dvs specielt har de samme areal.

Bemærk, at alle de sfæriske trekanter i første søjle alle har B som hjørne. Se på figur 3: De fire trekanter udgår alle fra B og danner tilsammen en halvkugle, nemlig alle trekanterne "over" den plan, som indeholder punkterne A , C , A' og C' . Summen af arealerne af trekanterne i venstre søjle er altså $\frac{1}{2}F$.

Areal af sfærisk trekant

Vi er interesseret i at bestemme arealet af den sfæriske trekant ABC . Dertil viser det sig fornuftigt først at se på alle de sfæriske tokenanter, som indeholder trekant ABC . Der er tale om følgende sfæriske tokenanter, jævnfør figur 3:

$$ABA'C \quad CAC'B \quad BAB'C$$

Vinklerne i de tre tokenanter er henholdsvis A, C og B . Tokenaternes samlede areal er derfor ifølge (1) ovenfor:

$$\begin{aligned} & a(ABA'C) + a(CAC'B) + a(BAB'C) \\ (3) \quad & = \frac{A}{360^\circ} F + \frac{C}{360^\circ} F + \frac{B}{360^\circ} F = (A+B+C) \frac{F}{360^\circ} \end{aligned}$$

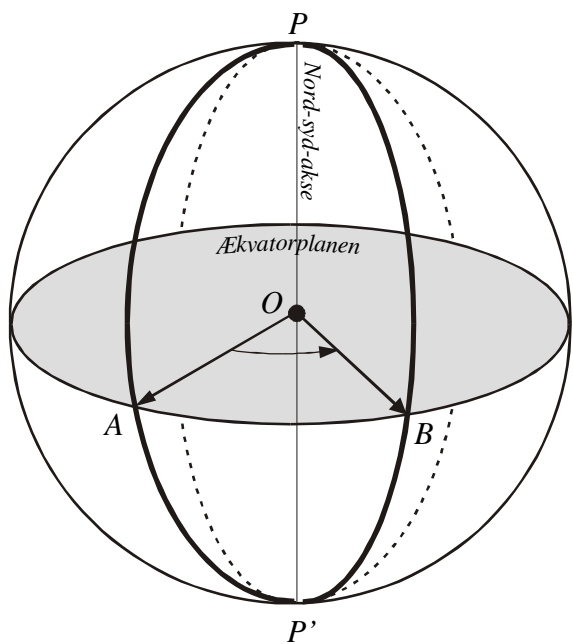
Vi skal finde et andet udtryk for det samme areal. Hver tokant kan splittes op i to trekanter. Tokant $ABA'C$ kan for eksempel splittes op i trekanterne ABC og $A'BC$ (bemærk systemet!). Alt i alt kan de tre tokenanter splittes op i følgende 6 trekanter:

$$ABC \quad A'BC \quad ABC \quad ABC' \quad ABC \quad AB'C$$

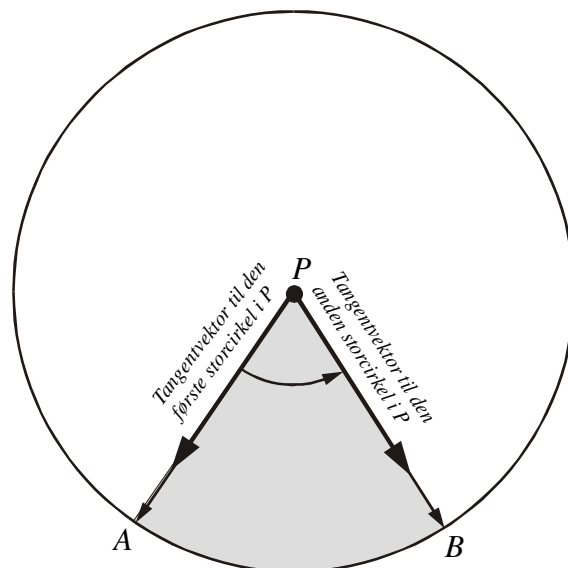
For det første er der tre styk af trekant ABC . Dernæst er der ét styk af alle de øvrige trekanter på den "øvre halvkugle" (halvkugle "over" storcirklen $ACA'C'$) *undtagen* trekant $A'BC'$. Til gengæld er der en anden trekant, nemlig $AB'C$. Imidlertid er $A'BC'$ og $AB'C$ hinandens antipodiske, så de er kongruente og har samme areal. Så vi kan uden videre udskifte trekant $AB'C$ med $A'BC'$ uden at det ændrer på det samlede areal. Efter udskiftningen har vi altså ét styk af hver af trekanterne på den "øvre" halvkugle samt to ekstra dubletter af trekant ABC . Da arealet af en halvkugle er $\frac{1}{2}F$, får vi nu et nyt udtryk for tokenaternes samlede areal: $2 \cdot a(ABC) + \frac{1}{2}F$. Sættes dette udtryk lig med (3) får vi:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a(ABC) + \frac{1}{2}F = (A+B+C) \frac{F}{360^\circ} \\ (4) \quad & \Downarrow \\ & a(ABC) = (A+B+C-180^\circ) \frac{F}{720^\circ} \end{aligned}$$

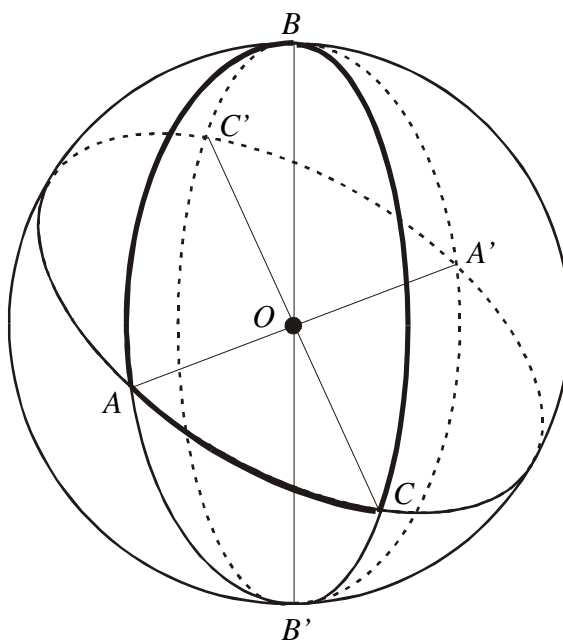
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Sfæriske koordinater til rektangulære koordinater

Tillæg til side 105 i *matematik højniveau 1* fra TRIP.

Punktet Q ligger lodret under punktet P i xy -planen. Bemærk, at φ er den vinkel, som \overrightarrow{OQ} er drejet i forhold til x -aksen. Vinklen φ regnes i intervallet $]-180^\circ; 180^\circ]$ og regnes positiv over mod y -aksen og negativ den modsatte vej. Vinklen θ er den "lodrette vinkel", dvs. den vinkel, som \overrightarrow{OP} ligger over \overrightarrow{OQ} . Vinklen regnes i intervallet $[-90^\circ; 90^\circ]$: positiv, når \overrightarrow{OP} ligger over xy -planen og negativ, når \overrightarrow{OP} ligger under xy -planen.

Vi skal nu se på omsætningen mellem sfæriske og rektangulære koordinater: Helt præcist skal vi givet et punkt P med de sfæriske koordinater (φ, θ) finde hvad det svarer til i rektangulære koordinater (x, y, z) . Betragt det tredimensionale billede af situationen på figur 1: Punktet Q fås ved at projicere P ned i xy -planen. På figur 2 ser jeg specielt på trekanten OPQ . Vi finder nemt længden af linjestykket OQ :

$$(2a) \quad \sin(\theta) = \frac{z}{r} \quad \Leftrightarrow \quad z = r \cdot \sin(\theta)$$

$$(2b) \quad \cos(\theta) = \frac{|OQ|}{r} \quad \Leftrightarrow \quad |OQ| = r \cdot \cos(\theta)$$

På tilsvarende måde fås af figur 3, hvor situationen er set oppefra:

$$(3a) \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{|OQ|} \quad \Leftrightarrow \quad x = |OQ| \cdot \cos(\varphi)$$

$$(3b) \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{|OQ|} \quad \Leftrightarrow \quad y = |OQ| \cdot \sin(\varphi)$$

Indsættes (2b) i (3a) og (3b) fås

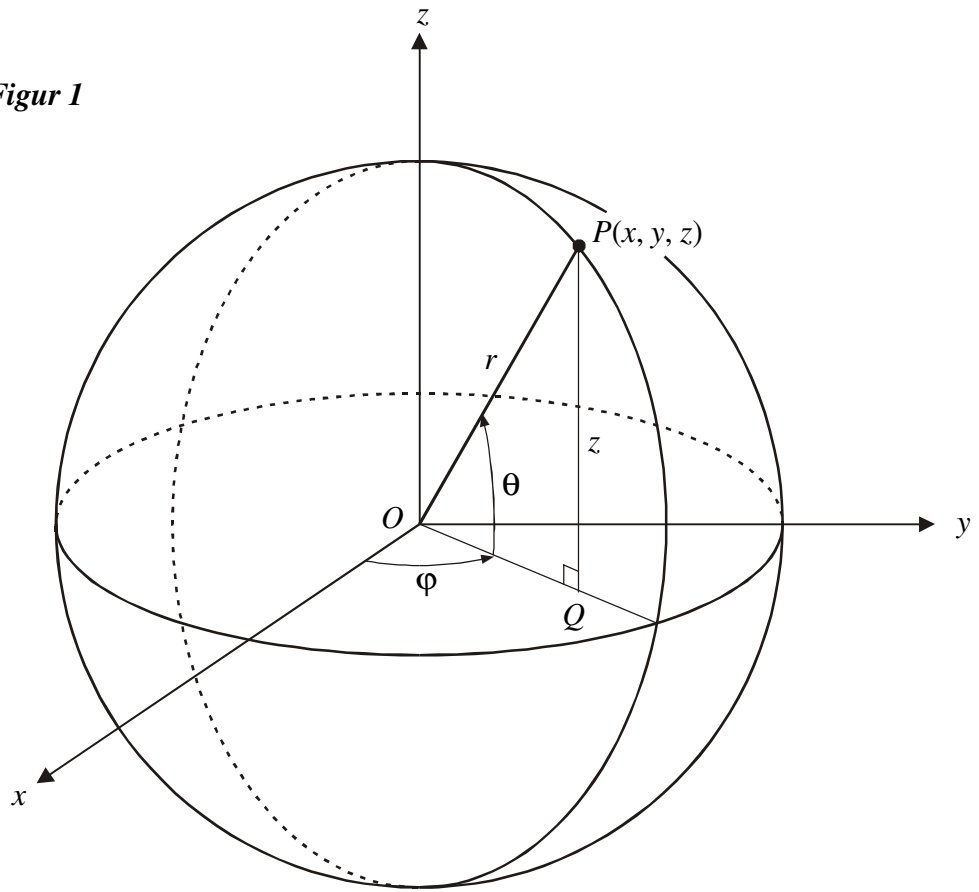
$$(4) \quad x = |OQ| \cdot \cos(\varphi) = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$(5) \quad y = |OQ| \cdot \sin(\varphi) = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

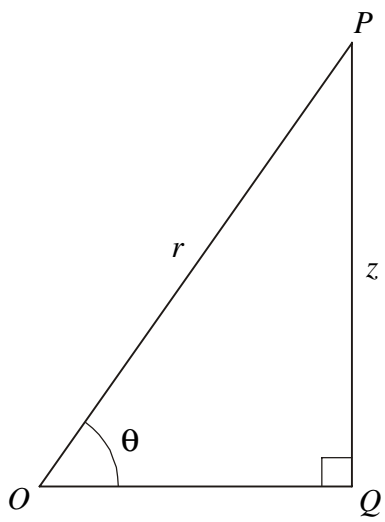
Sammen med (2a) giver (4) og (5) udtrykkene for de tre koordinater x , y , og z . I øvrigt er radius givet ved

$$(6) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Figur 1



Figur 2



Figur 3

