Storcirkelsejlads

Denne note er et udvidet tillæg til kapitlet om sfærisk geometri i TRIPs *Matematik højniveau 1,* ved Erik Vestergaard.

Nogle definitioner

I dette afsnit skal vi se på forskellige aspekter ved *storcirkelsejlads*, som er den mest direkte måde at bevæge sig fra et sted til et andet på jordkloden. Her tager vi selvfølgelig ikke hensyn til "forhindringer" såsom mellemliggende landområder etc etc. Teorien er mindst lige så anvendelig for transport med fly, da der ofte ikke vil være de samme "forhindringer" at tage hensyn til.

På jordkloden angives en *position* ved (b, λ), hvor b er stedets *breddegrad*, og λ er stedets *længdegrad*. Som bekendt er breddegraden lig med vinklen fra ækvator til stedet, regnet med fortegn. På figur 1 er breddegraden for stedet B således lig med $\angle POB$. Breddegraden regnes fra $-90°$ til $90°$, således, at sydpolen har breddegrad $-90°$, ækvator har breddegrad $0°$ og nordpolen har breddegraden $90°$.

Med en *meridian* menes en halv storcirkel, der går fra sydpolen til nordpolen. Den kan også betegnes en *længdegradscirkel*. Enhver position på en meridian har samme længdegrad. Positioner på den meridian, som passerer igennem *Greenwich* i England, defineres til at have længdegrad $0°$. Længdegraden hørende til en anden meridian fastlægges som vinklen mellem den pågældende meridian og *Greenwich-meridianen*, regnet med fortegn, således at man regner længdegraden positiv mod vest og negativ mod øst. Længdegraden regnes altså i intervallet $]-180°, 180°]$. Undertiden angives længdegraden dog også i intervallet $[0°, 360°]$, på oplagt vis.

Hvis man indlægger jordkloden i et tredimensionalt koordinatsystem, således at centrum O anbringes i centrum, ækvatorplanen anbringes i xy-planen og Greenwich anbringes i den positive kvadrant af xz-planen, så kan de sædvanlige sfæriske koordinater (φ, θ) identificeres med henholdsvis $-\lambda$ og b.

Sejlads langs breddeparallel

Mens vi er i gang med at indføre nye begreber, vil det være hensigtsmæssigt at omtale begrebet en *breddeparallel*. En breddeparallel er en *lillecirkel*, som er parallel med ækvatorplanen. Alle steder på en breddeparallel har dermed samme breddegrad. *Bemærk, at en del af en breddeparallel ikke kan være side i en sfærisk trekant, med mindre breddeparallellen da lige netop er ækvatorcirklen*. Siderne i en sfærisk trekant skal jo være *storcirkelbuer*.

Bemærk samtidigt, at længden af en breddeparallel er $L = 2\pi R_J \cdot \cos(b)$, hvor $R_J = 6370$ km er jordens radius. Begrundelsen herfor er, at radius i lillecirklen jo er lig med $R_J \cdot \cos(b)$, hvilket man kan overbevise sig om ved at betragte figur 2. Hvis man kun bevæger sig rundt langs en del af en breddeparallel, svarende til, at man ændrer længdegrad $lgf. = \lambda_B - \lambda_A$ (*lgf.* står for længdeforskel), så er den tilbagelagte strækning langs breddeparallellen lig med

(1)
$$L_{\text{Breddeparallel}} \quad = \quad 2\pi R_J \cos(b) \cdot \frac{|\,lgf.|}{360°}$$

nemlig svarende til den brøkdel af breddeparallellen, som er tilbagelagt.

Først i midten af 1700-tallet opfandt man navigationsinstrumenter med hvilke man kunne bestemme længdegraden med bare nogenlunde sikkerhed. Indtil da kunne man altså kun regne nogenlunde med breddegradsmålinger. Som en følge heraf gjorde man ofte brug af *breddesejlads*, hvilket vil sige, at man fulgte en breddeparallel indtil man kom til den meridian, hvor destinationen befandt sig, og derefter sejlede stik syd/nord langs meridianen indtil man var fremme.

Distance og startkurs

Når man skal bestemme forskellige størrelser i forbindelse med storcirkelsejlads, så kan det gøres ved at betragte en ganske bestemt sfærisk trekant, nemlig den, der har hjørner i Nordpolen, samt *affarende sted* og *påkommende sted*. På figur 1 betegnes de henholdsvis med *N*, *A* og *B*. Positionerne *A* og *B* er angivet ved breddegrad og længdegrad: (b_A, λ_A) og (b_B, λ_B). Da buen *PB* er lig breddegraden b_B, så må siden *NB* være lig med $90° - b_B$. Tilsvarende er siden *NA* lig med $90° - b_A$. Endvidere ser man, at vinklen *N* er lig med den numeriske værdi af længdeforskellen $lgf. = \lambda_B - \lambda_A$. Den er i øvrigt lig med $\angle QOP$ nede i ækvatorplanen. Når koordinaterne for affarende og påkommende sted er kendt, så kan distancen *dist.* mellem de to steder findes. Det er underforstået, at der er tale om den korteste afstand, altså længden af storcirkelbuen. Ved brug af cosinusrelationen

(2)
$$\cos(c) \quad = \quad \cos(a)\cos(b) \ + \ \sin(a)\sin(b)\cos(C)$$

med $c = dist.$, $a = NB$, $b = NA$ og $C = N = |\,lgf.|$ fås følgende formel til bestemmelse af distancen:

(3)
$$\cos(dist.) \quad = \quad \cos(90°-b_A)\cos(90°-b_B) \ + \ \sin(90°-b_A)\sin(90°-b_B)\cos(lgf.)$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos(dist.) \quad = \quad \sin(b_A)\sin(b_B) \ + \ \cos(b_A)\cos(b_B)\cos(lgf.)$$

hvor vi har benyttet, at $\sin(90°-v)=\cos(v)$ og $\cos(90°-v)=\sin(v)$ samt at cosinus er "ligeglad" med, om man ændrer fortegn på vinklen: $\cos(|lgf.|)=\cos(lgf.)$. Distancen fås via formel (3) i vinkelmål. Ønskes distancen omregnet til km, så kan man benytte, at 1 *bueminut* = $(\frac{1}{60})°$ svarer til 1 *sømil*, eller 1852 meter.

Dernæst kunne det være interessant at bestemme kursen $kurs_A$ fra *A*. Det er den kurs, som skibet lægger ud med, når den starter på sin rejse langs storcirkelbuen hen imod stedet *B*. Bemærk, at skibet under en storcirkelsejlads normalt ikke vil holde fast kurs på rejsen. Kursen vil normalt løbende ændre sig. Men hvad er kursen helt præcist? Kursen er den vinkel, som skibet danner med meridianerne. Vi vedtager at regne kursen i intervallet $]-180°,180°]$, hvor kursen skal være $-90°$ for retning stik øst, $0°$ for retning stik nord, $90°$ for retning stik vest og $180°$ for retning stik syd. Man kan bruge cosinusrelationerne til at angive en formel til bestemmelse af startkursen fra *A*. Det overlades til læseren at vise, at

(4) $$\cos(kurs_A) \;=\; \frac{\sin(b_B) \;-\; \sin(b_A)\cos(dist.)}{\cos(b_A)\sin(dist.)}$$

Hvis *B* ligger vest for *A*, så er fortegnet for $kurs_A$ positivt, ellers er det negativt.

Formler for en retvinklet sfærisk trekant

I det følgende får vi brug for et par formler, som gælder for en *retvinklet sfærisk trekant*, dvs en trekant, hvor mindst én vinkel er lig med $90°$.

Sætning 1

For en retvinklet sfærisk trekant, hvor den rette vinkel betegnes med *C*, gælder følgende formler:

(1.1) $\cos(c)=\cos(a)\cos(b)$

(1.2) $\sin(A)=\dfrac{\sin(a)}{\sin(c)}$

(1.3) $\cos(A)=\dfrac{\tan(b)}{\tan(c)}$

Bevis: (1.1) fås straks af den sfæriske cosinusrelation (2), idet $\cos(C) = \cos(90°) = 0$. Formel (1.2) fås straks ved hjælp af den sfæriske sinusrelation, idet $\sin(90°) = 1$:

$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{1}{\sin(c)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$$

Formel (1.3) indses ved følgende regninger:

$$\cos(A) = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)} = \frac{\dfrac{\cos(c)}{\cos(b)} - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}$$

$$= \frac{\cos(c) - \cos^2(b)\cos(c)}{\cos(b)\sin(b)\sin(c)} = \frac{\cos(c)\left[1 - \cos^2(b)\right]}{\cos(b)\sin(b)\sin(c)}$$

$$= \frac{\cos(c)\cdot\sin^2(b)}{\cos(b)\sin(b)\sin(c)} = \frac{\dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}}{\dfrac{\sin(c)}{\cos(c)}} = \frac{\tan(b)}{\tan(c)}$$

hvor vi undervejs har benyttet følgende: 1. lighedstegn fås ved at bruge en af varianterne af cosinusrelationen. 2. lighedstegn: Her benyttes formel (1.1). 3. lighedstegn: Tæller og nævner forlænges med cos(*b*). 5. lighedstegn: ”Idiotformlen” benyttes.

□

Maksimal breddegrad

Når et skib fra positionen *A* (b_A, λ_A) med startkurs $kurs_A$ bevæger sig rundt langs en storcirkel på jordkloden, så vil der være et sted *M* på cirklen med *maksimal bredde*. Betragt den sfæriske trekant, som har hjørner i *A*, *M* og nordpolen *N*, illustreret på figur 3. At *M* er stedet for maksimal bredde kan karakteriseres ved, at vinklen *M* i trekanten er *ret*. Skibets kurs på dette sted må jo nødvendigvis være stik øst/vest (overvej). Hvis vi bruger formel (1.2) ovenfor med *A*, *B* og *C* lig med henholdsvis *A*, *N* og *M*, så fås:

$$\sin(kurs_A) = \frac{\sin(90° - b_M)}{\sin(90° - b_A)} = \frac{\cos(b_M)}{\cos(b_A)}$$

idet siden *NM* jo er lig med $90° - b_M$, hvor b_M angiver den maksimale bredde, der jo forekommer på stedet *M*. Dette giver anledning til formlen

(5) $$\cos(b_M) = \cos(b_A)\sin(kurs_A)$$

For at kunne udregne længdegraden λ_M for stedet *M* bestemmer vi først et udtryk for længdeforskellen lgf_{AM} fra position *A* til position *M*, regnet med fortegn. Længdegraden λ_M kan derefter findes som $\lambda_M = \lambda_A + lgf_{AM}$. Man ser af figur 3, at vinklen *N* i trekant *ANM* er lig med lgf_{AM}. Benyttes formel (1.3) med *A*, *B* og *C* lig med henholdsvis *N*, *A* og *M* så fås følgende:

$$(6) \qquad \cos(lgf_{AM}) = \frac{\tan(90° - b_M)}{\tan(90° - b_A)} = \frac{\tan(b_A)}{\tan(b_M)}$$

Når man tager $\cos^{-1}$ til udtrykket på højre side for at finde lgf_{AM}, så må man i det enkelte tilfælde afgøre, om det er plus eller minus vinklen, der er den korrekte. Gennemføres kun en del af storcirklen og indeholder denne del ikke positionen med den maksimale bredde, angivet med formlerne (5) og (6), så vil kurvens maksimale bredde findes i et af rutens endepunkter.

Positioner på storcirkelbuen

Lad os slutte teorien af med endnu en situation: Hvis man kender længdegraden λ_D et sted *D* på storcirkelbuen ønskes en formel for den tilhørende bredde b_D. Vi vil gå ud fra, at vi i forvejen har bestemt stedet (b_M, λ_M) med den maksimale bredde.

Først udregnes længdegradsforskellen $lgf_{MD} = \lambda_D - \lambda_M$. Herefter kan den ønskede bredde bestemmes af formlen

$$(7) \qquad \tan(b_D) = \tan(b_M) \cdot \cos(lgf_{MD})$$

Bevis: Formel (7) fås ved at kigge på den retvinklede sfæriske trekant *NMD* på figur 4. Hvis vi bruger formel (1.3) ovenfor med *A*, *B* og *C* lig med henholdsvis *N*, *D* og *M*, så får man:

$$(8) \qquad \cos(lgf_{MD}) = \frac{\tan(90° - b_M)}{\tan(90° - b_D)} = \frac{\tan(b_D)}{\tan(b_M)}$$

hvilket giver det ønskede.

Et resumé af formler

Lad os lige resumere de formler, som er angivet og bevist i de foregående afsnit:

Formler for storcirkelsejlads

(3) $\cos(dist.) = \sin(b_A)\sin(b_B) + \cos(b_A)\cos(b_B)\cos(lgf.)$

(4) $\cos(kurs_A) = \dfrac{\sin(b_B) - \sin(b_A)\cos(dist.)}{\cos(b_A)\sin(dist.)}$

(5) $\cos(b_M) = \cos(b_A)\sin(kurs_A)$

(6) $\cos(lgf_{AM}) = \dfrac{\tan(b_A)}{\tan(b_M)}$

(7) $\tan(b_D) = \tan(b_M)\cdot\cos(lgf_{MD})$

For at bestemme længdegraden λ_M benyttes formlen $\lambda_M = \lambda_A + lgf_{AM}$. Husk at når man tager $\cos^{-1}$ på begge sider i formlen (6), så må man i hvert enkelt tilfælde overveje, om længdeforskellen er lig med plus eller minus den vinkel, som lommeregneren giver.

Et eksempel

En flyver afgår fra København $(55°36'\ \text{N.br.},\ 12°38'\ \text{Ø.lg.})$ via storcirkelruten mod Los Angeles $(33°57'\ \text{N.br.},\ 118°25'\ \text{V.lg.})$. Lad os bestemme de forskellige størrelser gennemgået i teorien ovenfor. København anbringes i hjørnet A og Los Angeles anbringes i hjørnet B i den sfæriske trekant, som desuden omfatter Nordpolen N. Vi har:

$$b_A = 55°36' = 55{,}60°, \quad \lambda_A = -12°38' = -12{,}63°$$
$$b_B = 33°57' = 33{,}95°, \quad \lambda_B = 118°25' = 118{,}42°$$
$$lgf. = \lambda_B - \lambda_A = 118{,}42° - (-12{,}63°) = 131{,}05°$$

$$\begin{aligned}\cos(dist.) &= \sin(b_A)\sin(b_B) + \cos(b_A)\cos(b_B)\cos(lgf.)\\ &= \sin(55{,}60°)\sin(33{,}95°) + \cos(55{,}60°)\cos(33{,}95°)\cos(131{,}05°)\\ &= 0{,}15303\end{aligned}$$

Hvilket giver en distance på $81{,}20°$. Dette svarer til $81{,}20 \cdot 60 \cdot 1{,}852\ \text{km} = 9023\ \text{km}$.
Nu til startkursen fra København:

$$\cos(kurs_A) = \frac{\sin(b_B) - \sin(b_A)\cos(dist.)}{\cos(b_A)\sin(dist.)} = \frac{\sin(33{,}95°) - \sin(55{,}60°)\cos(81{,}20°)}{\cos(55{,}60°)\sin(81{,}20°)}$$

$$= 0{,}77413$$

hvilket giver følgende kurs fra København: $kurs_A = 39{,}27°$.

Næste punkt er at bestemme det nordligste punkt, som flyet opnår på sin rejse til Los Angeles. Først den maksimale bredde:

$$\cos(b_M) = \cos(b_A)\sin(kurs_A) = \cos(55{,}60°)\sin(39{,}27°) = 0{,}35764$$

hvilket giver $b_M = 69{,}04°$. For at finde længdegraden må vi først udregne længdeforskellen fra København til det nordligste punkt M på ruten.

$$\cos(lgf_{AM}) = \frac{\tan(b_A)}{\tan(b_M)} = \frac{\tan(55{,}60°)}{\tan(69{,}04°)} = 0{,}55932$$

Heraf fås $lgf_{AM} = 55{,}99°$ idet det åbenlyst er den positive løsning, der er den korrekte. Nu kan vi udregne længdegraden hørende til det nordligste punkt:

$$\lambda_M = \lambda_A + lgf_{AM} = (-12{,}63°) + 55{,}99° = 43{,}36°$$

Positionen $(b_M, \lambda_M) = (69{,}04°, 43{,}36°)$ svarer til et sted i det centrale af Grønland.

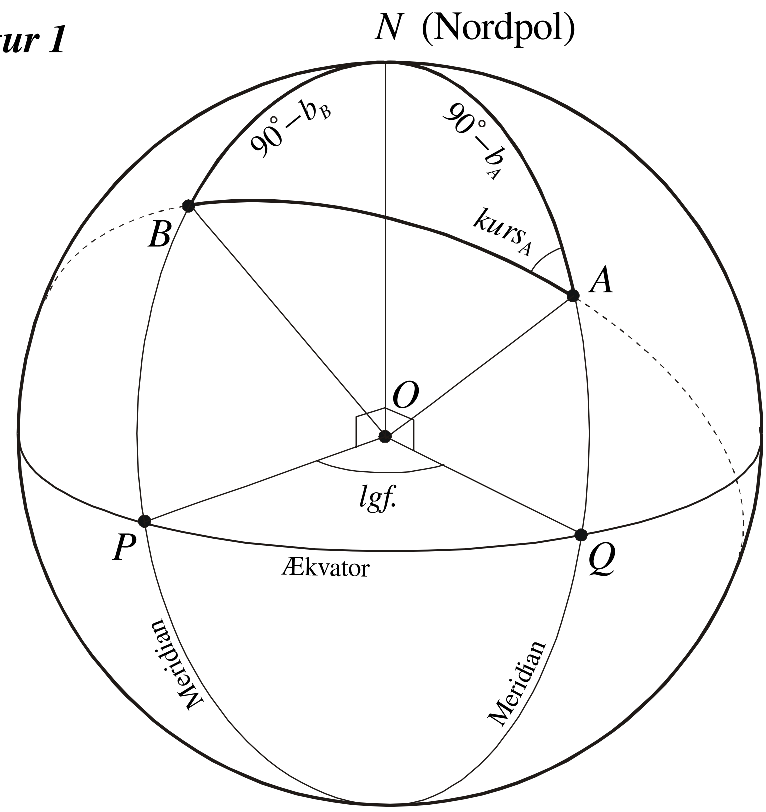
Til sidst skal vi finde ud af, hvor flyet passerer meridianen med længden $110°$ V.lg. Først bestemmer vi længdeforskellen fra det nordligste punkt til omtalte meridian: $lgf_{MD} = \lambda_D - \lambda_M = 110° - 43{,}36° = 66{,}64°$. Herefter kan breddegraden findes:

$$\tan(b_D) \;=\; \tan(b_M)\cdot\cos(lgf_{MD}) \;=\; \tan(69{,}04°)\cdot\cos(66{,}64°) \;=1{,}03510$$

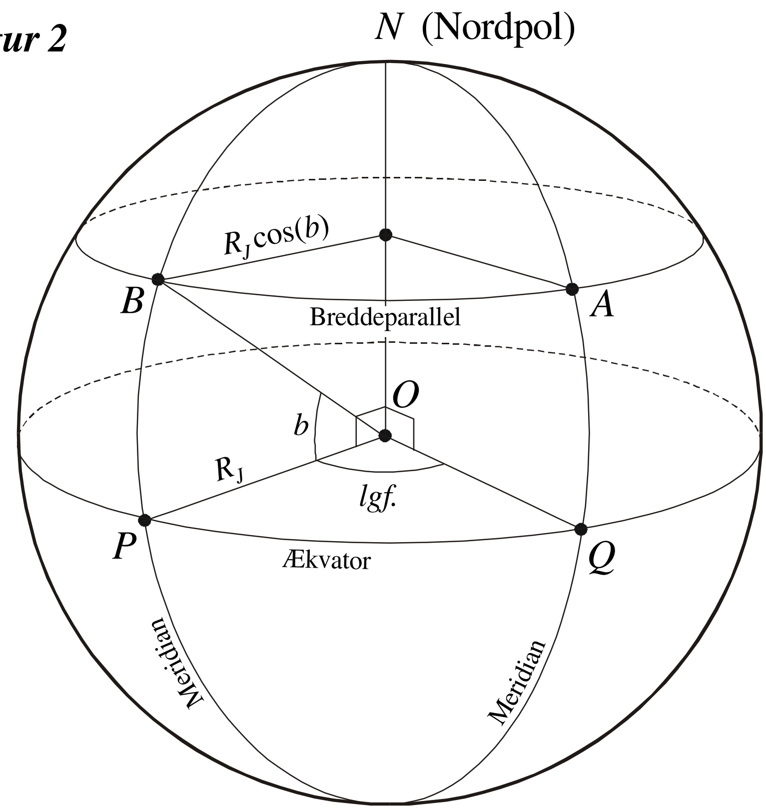
hvilket giver $b_D = 45{,}99°$. Positionen $(45{,}99°\ \text{N.br.}, 110°\ \text{V.lg.})$ svarer i øvrigt til et sted i staten Montana i det nordlige USA.

□

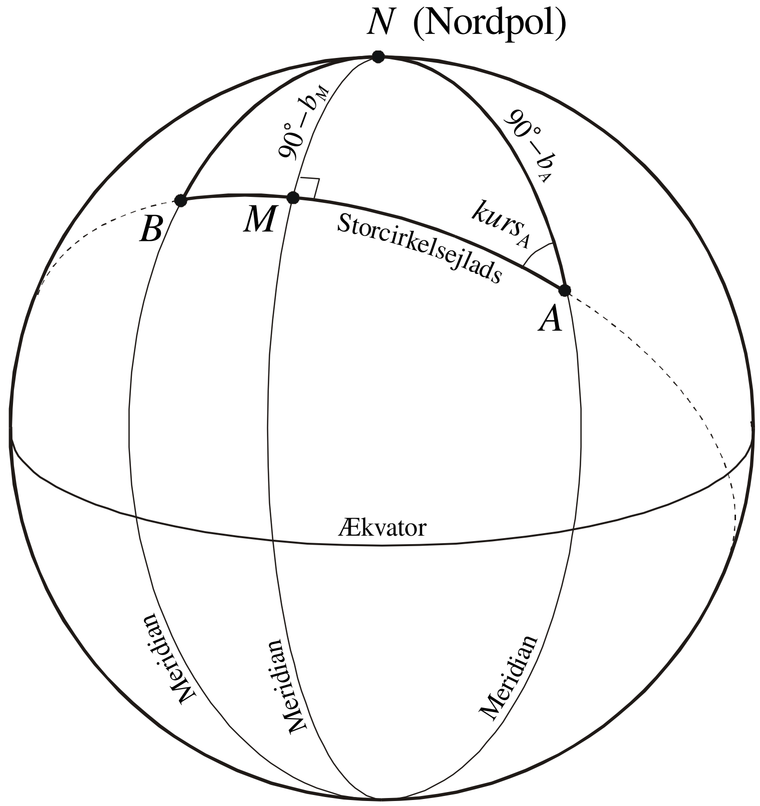
Figur 1



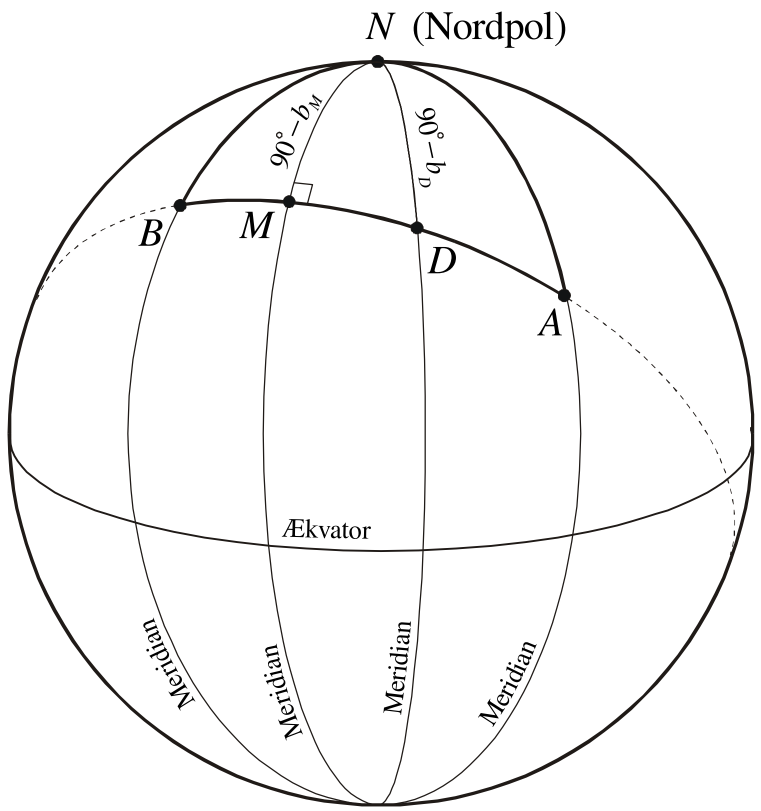
Figur 2



Figur 3



Figur 4



Storcirkelrute

København - Los Angeles