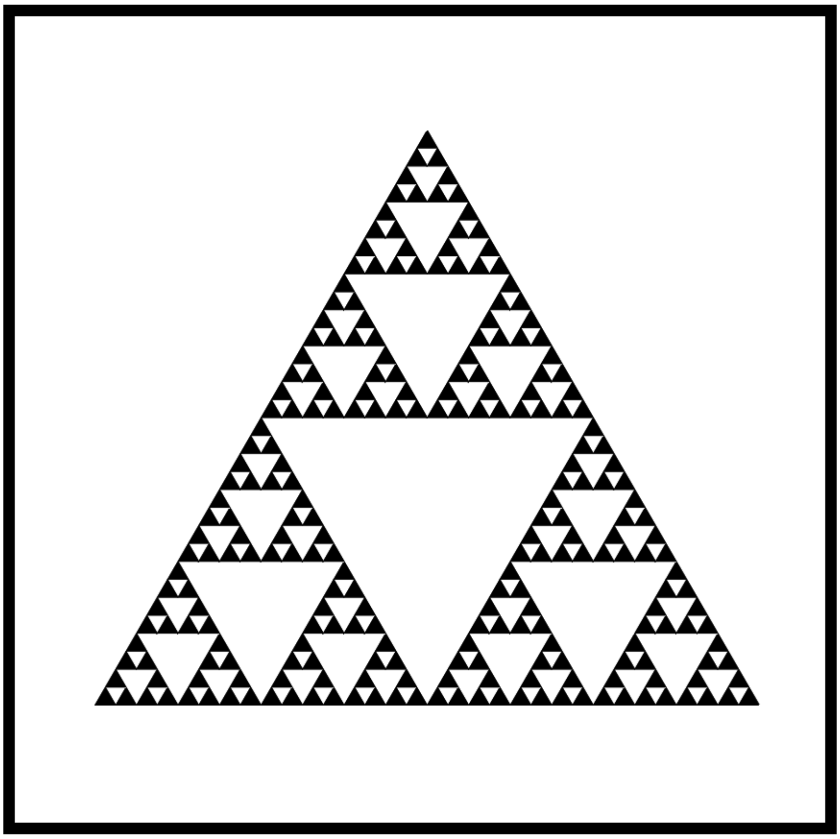
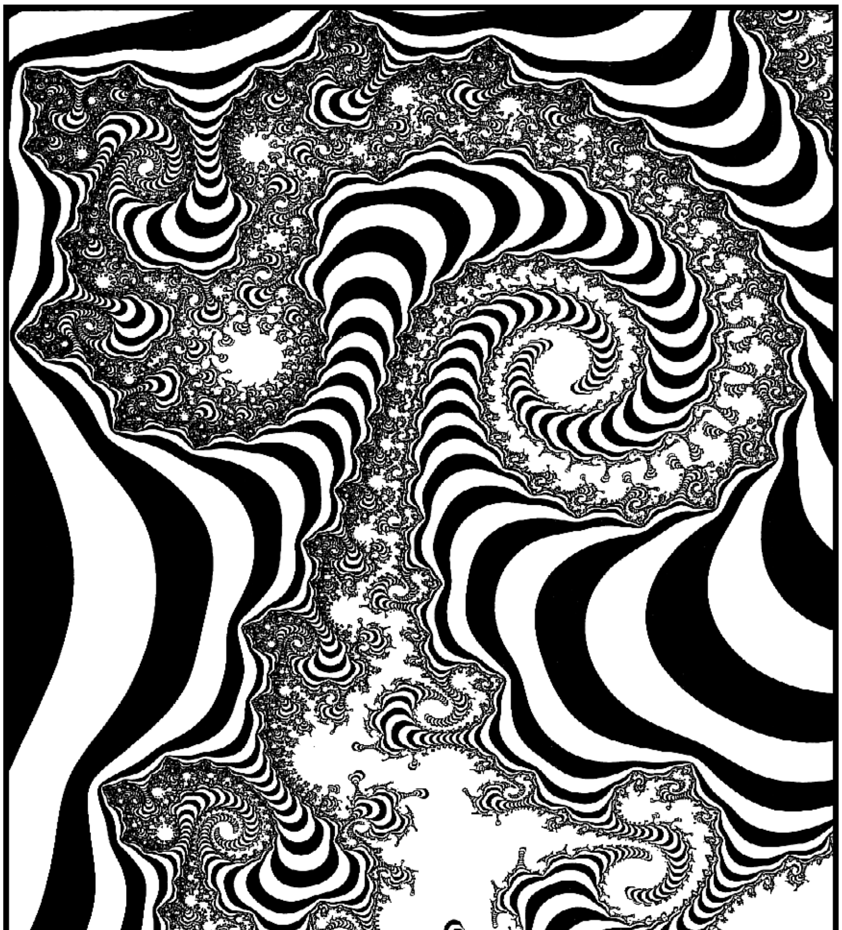
# FRAKTALER





# Fraktaler

## Vejledning

Denne note kan benyttes i gymnasieundervisningen i matematik i 1g, eventuelt efter gennemgangen af emnet logaritmer. Min hensigt har været at give en lille introduktion til en anderledes slags geometri end den sædvanlige, som et eksempel på en eksotisk gren af matematikken. Noten er udformet. så man undervejs skal løse en række øvelser for at nå frem til pointen.

*Erik Vestergaard, Haderslev.*

## Et snefnug

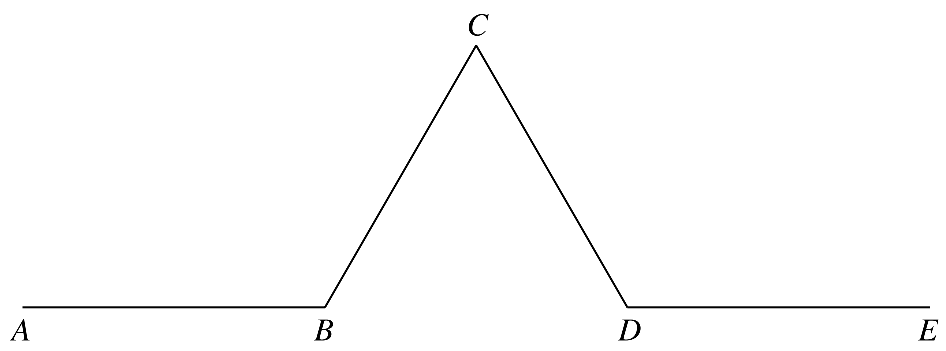
Betragt et linjestykke med længden 1.

*Figur 1*



Inddel linjestykket i tre lige store dele og fjern den midterste tredjedel. Det fjernede stykke erstattes af to nye linjestykker $BC$ og $CD$ af samme længde, som vist på figuren nedenfor. $BCD$ er således hjørnerne i en ligesidet trekant.

*Figur 2*

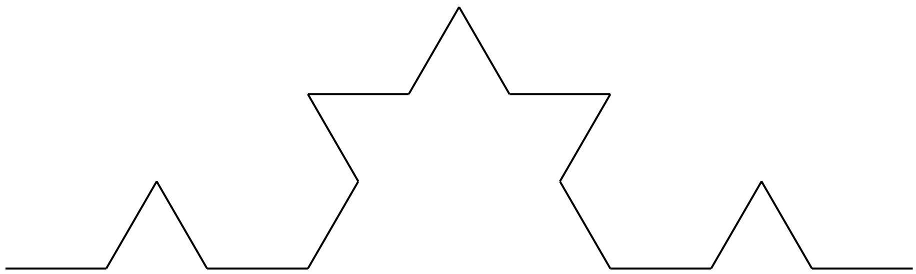


**Øvelse 1**

Hvad er længden af kurven i figur 2 ?

Fortsæt nu med at inddele hver af de fire linjestykker *AB*, *BC*, *CD* og *DE* i tre lige store dele. Fjern det midterste stykke og erstat det med ”en spids”, således at spisen og den fjernede midterste tredjedel som før udgør en ligesidet trekant. Herved fås følgende billede:

*Figur 3*

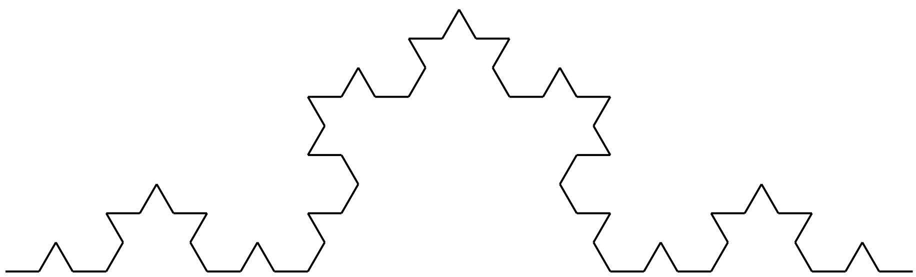


**Øvelse 2**

Hvad er længden af kurven på figur 3?

Fortsæt med at ”sætte en spids på” hvert af linjestykkerne i figur 3. Herved fås følgende figur:

*Figur 4*

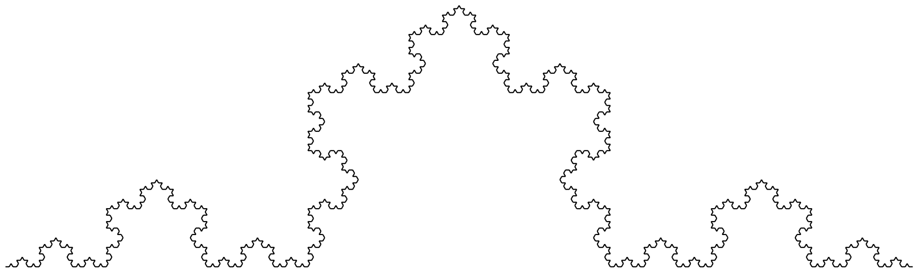


**Øvelse 3**

Find længden af kurven og forsøg om du kan finde et system i, hvor meget længere kurven bliver, hver gang man sætter flere spidser på.

Vi kunne nu i princippet fortsætte denne proces lige så mange gange, vi måtte ønske det. I matematikkens verden kan man endda forestille sig processen fortsat *uendeligt* mange gange. Herved opnås en højst besynderlig kurve, som ser ud som noget i retningen af kurven på nedenstående figur.

*Figur 5*



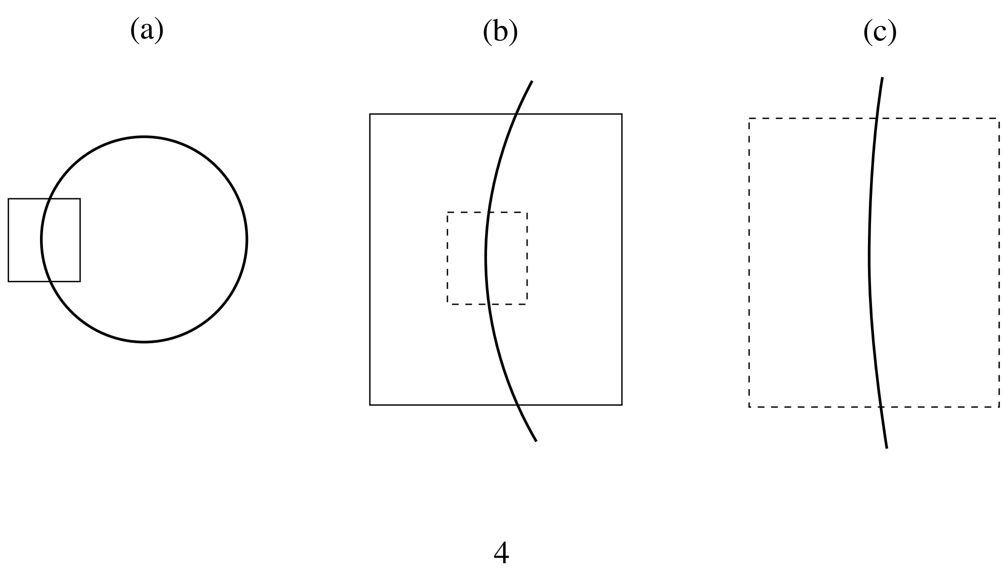
Kurven betegnes *snefnugget* eller *Koch's kurve* til ære for den svenske matematiker *Helge von Koch*, som i 1904 studerede denne mærkelige kurve.

**Øvelse 4**

Brug resultaterne fra forrige øvelse til at finde længden af snefnugget.

Det specielle ved en kurve såsom snefnugget er blandt andet, at hvis man går tættere på den i et mikroskop, så vil man se et billede, som fuldstændigt ligner figuren i fuld størrelse. Kurven siges at være *selvsimilær* eller *selvligedannet*. Det er en helt ny egenskab i forhold til de gamle, traditionelle geometriske figurer, studeret lige siden oldtiden, for eksempel *cirkler* og *polygoner*. Nedenfor "zoomer" vi ind på en cirkel.

*Figur 6*



I delfigur 6(a) angiver rektanglet den del af cirklen, vi gerne vil se en forstørrelse af. Forstørrelsen ses herefter i delfigur 6(b). Vi ønsker at zoome yderligere ind til området markeret med det lille stiplede rektangel. Resultatet ses i delfigur 6(c). Vi ser, at jo mere vi zoomer ind på en cirkel, jo mere vil kurven komme til at ligne en ret linje.

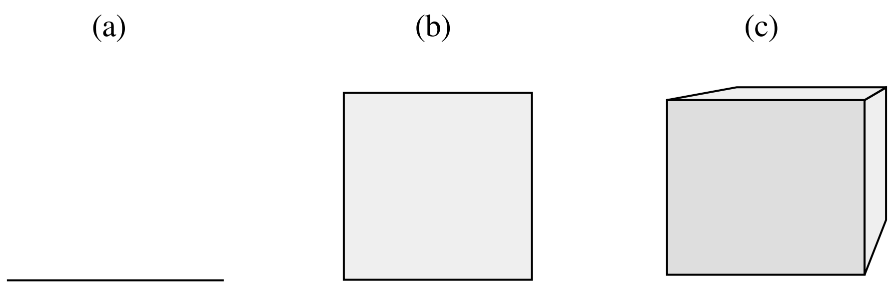
Med fraktaler er det anderledes. De vil fortsætte med at have en righoldig struktur, ligegyldigt hvor meget man zoomer ind på dem. En anden ting er, at nogle fraktale kurver, som for eksempel snefnugget, snor sig så ubehersket, så de faktisk har en uendelig længde. Betegnelsen *fraktal* blev først anvendt af den franske matematiker *Benoit Mandelbrot*, og udtrykket stammer fra det latinske ord *fractus*, som betyder *irregulær*. I det følgende skal vi se, hvordan vi kan tillægge en fraktal en ikke-heltallig *dimension*.

## Hvad er dimension?

De fleste har hørt dette begreb brugt i dagligdagen. Hvad er dimensionerne af bordet? (Der hentydes til *længde*, *højde* og *bredde*) eller udtrykket *film i tre dimensioner* (3*D).* I sidstnævnte tilfælde er der tale om, at man udover bare at se et plant billede også fornemmer dybden i billedet.

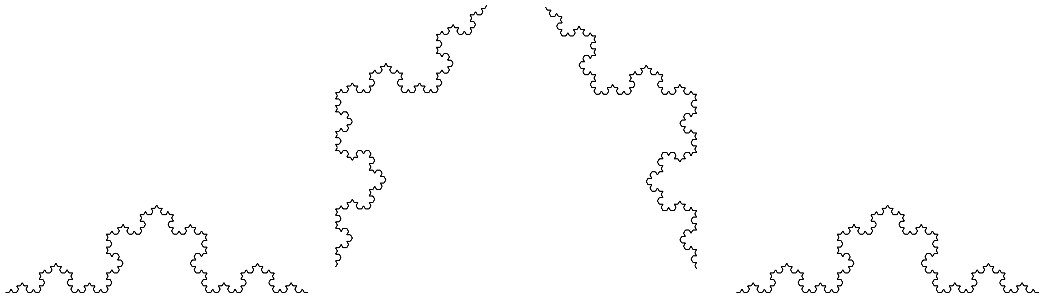
Man taler om, at en *linje* har dimension 1 (der er kun en længde), en *udfyldt firkant* har dimension 2 (der er en længde og en bredde) og en *massiv kasse* har dimension 3 (der er en længde, en bredde og en højde).

*Figur 7*




En cirkelperiferi har i øvrigt også dimension 1. Vi må udvide vores *dimensionsbegreb* hvis vi ønsker at tillægge fraktaler en dimension. De selvsimilære fraktaler har som nævnt den egenskab, at de består af mindre dele, som hver især er formindskede kopier af fraktalen selv. Snefnugget er et eksempel herpå, som figur 8 på næste side antyder.

*Figur 8*



Lad $n$ være antallet af disse formindskede kopier og lad $s$ være det tal, som man skal gange den formindskede kopi op med for at få hele fraktalen. Angående $s$ så hentydes til den *lineære* forstørrelse: Altså $s$ er forholdet mellem *længden* af hele fraktalen og *længden* af den formindskede kopi. $s$ kaldes *skaleringsfaktoren*.

**Definition af dimension**

Dimensionen for en selvsimilær fraktal er det tal $d$, som opfylder $n = s^d$, hvor $n$ er antallet af formindskede kopier og $s$ er skaleringsfaktoren.

For snefnugget er $n = 4$ ifølge figur 8. Figuren viser desuden, at $s = 3$, idet længden af hele fraktalen er 3 gange så lang som længden af en af de formindskede kopier. Altså skal vi bestemme $d$, så $4 = 3^d$.

**Øvelse 5**

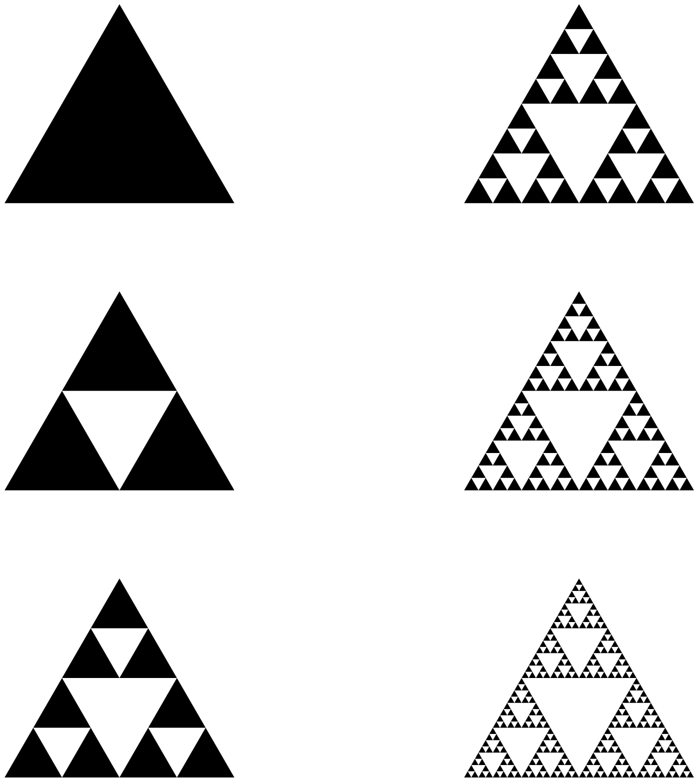
Bestem $d$. *Hjælp:* Hvis du kender til logaritmer kan du bruge dem til at løse opgaven. Ellers kan du prøve dig frem på lommeregneren.

Vi skal se på et par andre eksempler på selvsimilære fraktaler, nemlig den såkaldte *Sierpinsky-trekant* og *Sierpinsky-svampen*. Førstnævnte fremkommer ved en proces, som er beskrevet på figur 9 på næste side. Sidstnævnte kan du finde afbildet på figur 10 på næste side. Overvej ved hvilken proces den er fremkommet!

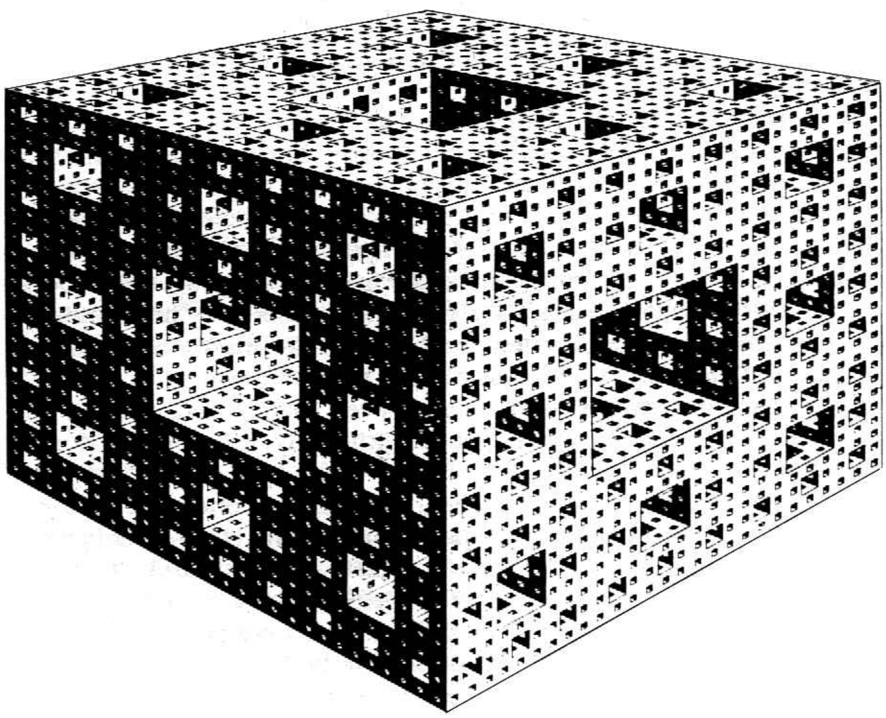
**Øvelse 6**

Bestem dimensionen af både Sierpinsky-trekanten og Sierpinsky-svampen.

*Figur 9*



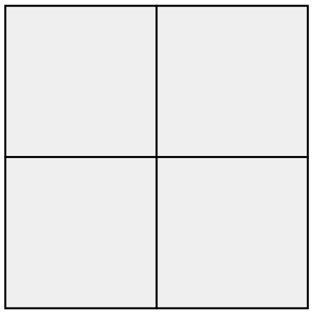
*Figur 10*



## Afsluttende kommentarer

Vores nye definition af dimension på side 6 dækker altså alle selvsimilære figurer. Det er imidlertid vigtigt at kontrollere, at denne nye definition stemmer overens med vores ”gamle” opfattelse af begrebet dimension, altså i de tilfælde, hvor begge definitioner kan anvendes. Tag for eksempel det udfyldte kvadrat fra figur 7(b). Der er tale om en selvsimilær geometrisk figur, idet kvadratet kan opfattes som bestående af fire formindskede kopier af kvadratet selv, som vist på figur 11.

*Figur 11*



Ifølge vores gamle dimensionsbegreb skal dimensionen være 2. Lad os se, om dimensionen også bliver 2, hvis vi bruger den nye definition. $n = 4$, da der er fire små kvadrater og skaleringsfaktoren er klart 2, da hele kvadratet er dobbelt så langt som hver af kopierne. Altså skal $d$ tilfredsstille $4 = s^d$. Det passer med, at $d = 2$ !

Efter vores gamle dimensionsbegreb skal for eksempel en cirkelperiferi have dimension 1, ligesom den rette linje har. Det nye dimensionsbegreb kan dog ikke anvendes i dette tilfælde, idet cirkelperiferien *ikke* er selvsimilær. Med den nye definition kan vi altså finde dimensionen af nogle nye figurer, såsom snefnugget, men den kan ikke klare alle de gamle figurer. Det var ønskeligt, om der fandtes et dimensionsbegreb, der kunne bruges i alle de tilfælde, vi har overvejet her i noten. Et dimensionsbegreb, som tillige kunne angive dimensionen for fraktaler, som ikke er selvsimilære. Det viser sig, at et sådant dimensionsbegreb eksisterer, og betegnes *Hausdorff-dimensionen*, og i de tilfælde, hvor tidligere metoder virker, giver Hausdorff-dimensionen det samme tal som tidligere metoder. Hausdorff-dimensionsbergrebet er dog for kompliceret til at blive gennemgået her.

Et eksempel på en ikke-selvsimilær fraktal er *Mandelbrot-mængden*, opkaldt efter den tidligere omtalte franskmand, Benoit Mandelbrot. Det er imidlertid en helt anden historie, som vi ikke vil berøre her.

# Løsninger til opgaver

Øvelse 1: Længden er $\frac{4}{3}$.

Øvelse 2: Længden er $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$

Øvelse 3: Længden er $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$. Hver gang der sættes et nyt sæt spidser på forøges længden med en faktor $\frac{4}{3}$.

Øvelse 4: Man må sige, at længden af snefnugget er *uendeligt* langt, eftersom $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ for $n \to \infty$.

Øvelse 5: Det eksakte tal er $\dfrac{\log(4)}{\log(3)} = 1,2619...$

Øvelse 6: Den eksakte dimension af Sierpinsky-trekanten er $\dfrac{\log(3)}{\log(2)} = 1,5850...$ mens den for Sierpinsky-svampen er $\dfrac{\log(20)}{\log(3)} = 2,7268...$