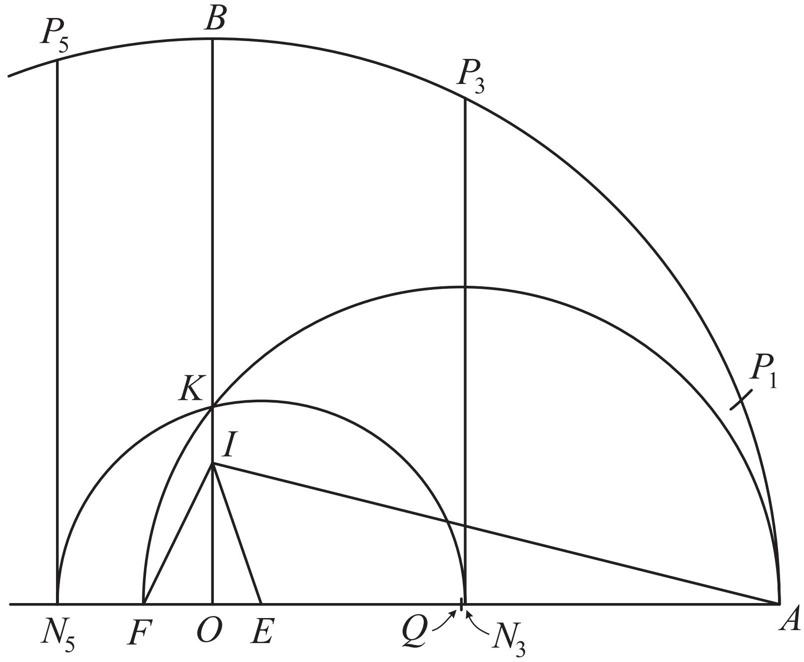
Klassiske konstruktioner

med passer og lineal



Erik Vestergaard

Indholdsfortegnelse

1. Forord

Formålet med denne note er at give læseren såvel en praktisk øvelse i at konstruere med passer og lineal som en teoretisk forståelse af hvad der ligger i begrebet "at konstruere med passer og lineal". Sidstnævnte er vigtigt for rigtigt at kunne forstå følgende fire problemer fra oldtiden, som stod uløste indtil 18. – 19. århundrede:

Vinklens tredeling
Terningens fordobling
Cirklens kvadratur
Regulære polygoners konstruktion

Til dette formål har jeg fundet det hensigtsmæssigt at anvende en mere moderne og efterrationaliseret fremstilling. Selv om den ikke fortæller hele historien om begrebernes udvikling, så lever den op til Platons ånd om at forsøge at trække tankeindholdet og idéerne ud af det konkrete, som omtalt i næste afsnit. Jeg vil i noten forudsætte, at læseren er fortrolig med de mest almindelige konstruktioner, såsom at *oprejse en normal i et punkt på en linje*, *nedfælde en normal igennem et punkt til en linje*, *konstruere en vinkelhalveringslinje, konstruere en linje igennem et punkt parallel med en anden linje* etc. . . .

2. Historisk indledning

Ægypterne benyttede geometrien til først og fremmest praktiske formål. Den græske historieskriver *Herodotos* (ca. 480 – 420 f.Kr.). fortæller, at geometrien opstod takket være Nilens oversvømmelser. Når vandet trak sig tilbage, skyllede det skelmærkerne væk fra de jordlodder, som *Farao Sesostris* – en savnskikkelse – havde tildelt og som man var sat i skat af. Landmåling var en livsnødvendighed for ægypterne. Men også på andre områder var dygtighed i praktisk geometri påkrævet, nemlig indenfor tempelbyggeri. Her viste ægypterne fabelagtig talent.

Hvorimod der altså ikke er noget der tyder på, at ægypterne så på geometrien fra et "teoretisk" synspunkt, så skete der en udvikling hos grækerne. De første grækere, som kom til Ægypten, fik kendskab til geometrien og det er dem, som betegnede den med det græske ord "geometria", som betyder jordmåling. Grækerne førte geometrien frem til en høj grad af fuldkommenhed, ikke mindst på grund af, at man stødte på en forhindring – "de usigelige tal" (irrationale tal). Lad os se lidt nærmere på det.

Kraftcenteret for matematiske studier var Pythagoræer-skolen – et religiøst-filosofisk broderskab, grundlagt ca. 550 f.Kr. i byen Kroton i Syd-Italien (se Crotona på figur 11.8 side 25), som var en daværende græsk koloni. Grundlæggeren var legendariske *Pythagoras* (6. århundrede f.Kr.). En af pythagoræernes oprindelige filosofier var, at alle forhold i naturen kan udtrykkes ved forhold mellem naturlige tal. Skolens elever opdagede dog selv uholdbarheden i deres filosofiske grundsætning. Dette skete ved opdagelsen af længder, som ikke er repræsenteret af rationale tal. Hypotenusen i en retvinklet trekant, hvis kateter begge har længde 1, har for eksempel en længde, som er repræsenteret ved et irrationalt tal – det vi kalder $\sqrt{2}$. Det fortælles, at pythagoræeren *Hippasos* ca. 500 f.Kr. opdagede sådanne længder, og at guderne i vrede over hans afsløring af denne ”ufuldkommenhed” skal have straffet ham med skibbrud.

Kun de positive rationale tal kunne skrives i grækernes talsystem. Med denne udvikling kom aritmetikken mere i baggrunden og geometrien blev centrum i matematikken. Grækerne begyndte at studere geometrisk definerede kurver, dvs. der i blandt den *rette linje* og *cirkler*, samt de figurer, der begrænses af linjestykker. Dette forklarer, at konstruktioner med passer og lineal kom på programmet!

Kun to hjælpemidler måtte benyttes ifølge *Platon* (427 – 347 f.Kr.). Dette fortæller historikeren *Plutarkhos*. Platon præciserede dette krav, fordi to medlemmer af hans berømte Akademi, *Eudoxos* og *Arkhytas*, havde krænket ham ved at indføre mekaniske metoder og fysiske fortolkninger i geometrien. En forbrydelse, som kun kan forstås, når man husker på, at geometrien var en gren af filosofien, der dyrkedes i Platons Universitet i *Akademos lund*, udenfor Athen. Ovenover indgangsporten stod skrevet: *Ingen ikke-geometer indtræde i mit hus*.

Det siges om Pythagoræerne, at de forvandlede geometrien til højere videnskab, hvilket med moderne ord vil sige, at de gav sig til at studere geometrien for dens egen skyld, som ”ren” videnskab. Bag studiet lå etiske krav med socialt sigte – det skulle opøve eleverne i selvbeherskelse og besjæle dem med moralsk kraft, så de kunne begå handlinger til gavn for almenheden. Mennesket skulle vænne sig til at se bag om tingene, søge den evige virkelighed, ifølge Platon. Han mente, at her havde studiet af geometri afgørende betydning som karakterdannende faktor. Det var på Platons tid, at lovene for logisk tankevirksomhed begyndte at fæstne sig: Opbygningen af det matematiske tankesystem, med dets grundbegreber, postulater definitioner osv. Man skulle lære at trække tankeindholdet, idéen, ud fra det konkrete.

3. Definitioner

Som sædvanlig i matematik må vi præcisere, hvad vi mener med nogle givne ord. *Konstruktion med passer og lineal* dækker over følgende operationer:

1) Tegne den rette linje igennem to allerede fundne eller givne punkter. Eller at forlænge et linjestykke, så langt man ønsker.

2) Tegne en cirkel med et allerede fundet eller givet punkt som centrum og med en radius, som er lig med afstanden mellem to allerede fundne eller givne punkter.

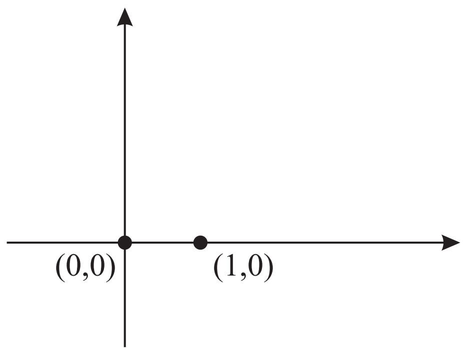
3) Finde nye punkter som skæringspunkterne for allerede fundne eller givne rette linjer og cirkler.

Ved et første øjekast kan det godt virke lidt begrænsende, at vi ikke har lov til at tage en vilkårlig afstand i passeren, sådan som det ofte er tilladt ved konstruktioner i Folkeskolen. Der er imidlertid ingen forskel, for den ofte usagte regel i folkeskolen er, at man *kun* må tage en vilkårlig afstand i passeren, hvis det punkt eller den linje, man ender med at konstruere, ikke afhænger af den valgte passeråbning. Dette er tilfældet med mange af de kendte konstruktionsmetoder: halvering af vinkler, oprejsning af normaler, konstruktion af en linje parallel med en given linje etc. Tilbage til definitionen ovenfor: Med den bliver man i stand til at argumentere for, hvad man kan konstruere, og i særdeleshed for, hvad man *ikke* kan konstruere. For at vi ”kan komme i gang” skal vi dog fra starten have givet mindst to punkter.

4. Om at konstruere punkter

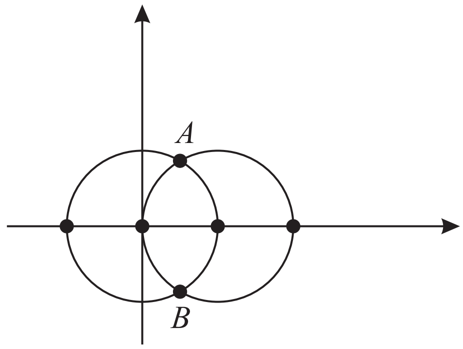
Lad os gå ud fra, at vi fra starten har givet to punkter med en afstand, vi vil kalde 1 (én enhed). For at få overblik over situationen, vil vi lægge punkterne ind i et koordinatsystem som henholdsvis (0,0) og (1,0).

Figur 4.1



Ved at tegne linjen igennem (0,0) og (1,0) og tegne cirkler med radius lig med afstanden mellem de to punkter og centrum i henholdsvis (0,0) og (1,0), får vi fire nye punkter:

Figur 4.2



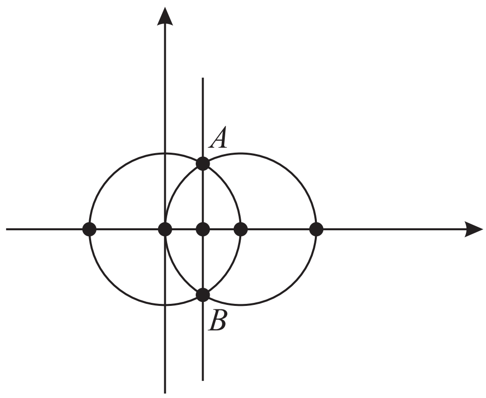
De to nye punkter på x-aksen har koordinaterne (–1,0) og (2,0).

Øvelse 4.3

Find koordinaterne for de to andre nye punkter, A og B .
Hjælp: Brug Pythagoras' sætning.

Ved at tegne en linje igennem A og B fås et nyt punkt, nemlig midtpunktet mellem de to oprindelige punkter:

Figur 4.4



Vi kunne fortsætte på denne måde med at konstruere punkter.

Øvelse 4.5 Find en måde at konstruere punkterne (0,1) og (0,2) på.

5. Om at konstruere tal

Definition 5.1

Vi vil sige, at vi kan konstruere tallet a såfremt vi kan konstruere to punkter med indbyrdes afstand a, hvis a er et positivt tal og $-a$, hvis a er et negativt tal.

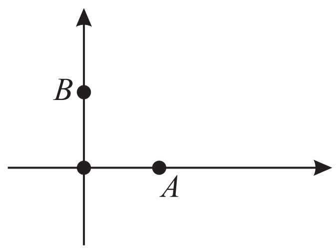
Eksempel 5.2

Tallet 1 kan konstrueres, idet de to startpunkter har indbyrdes afstand 1. Tallet –2 kan også konstrueres, idet vi jo nemt kan konstruere to punkter med afstand 2.

Eksempel 5.3

Vi kan ifølge ovenstående konstruere punktet (0,1):

Figur 5.4



Eftersom afstanden fra A til B ifølge Pythagoras' sætning er $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, så er tallet $\sqrt{2}$ altså konstruérbart.

Øvelse 5.5

Vis, at tallet $\sqrt{3}$ kan konstrueres.

Hvilke tal kan egentligt konstrueres? Vi har set nogle få eksempler, men for at få et rigtigt overblik over situationen, må vi gå lidt mere systematisk til værks. Et spørgsmål, man kunne stille sig er, at når nu $\sqrt{3}$ og 2 er konstruérbare, kan så også $\sqrt{3}+2$ konstrueres, eller mere generelt: Hvis a og b kan konstrueres, kan summen $a+b$ da konstrueres? Svaret er oplagt ja, hvis a og b er positive, idet man kan afsætte de to længder i forlængelse af hinanden, ud af en fælles ret linje, hvorefter yderpunkterne vil have afstanden $a+b$. Hvis et af tallene er negative overlades det til læseren at foretage de små nødvendige ændringer i argumentet. Tilsvarende overvejelser viser, at hvis a og b begge er konstruérbare, så er $a-b$ det også.

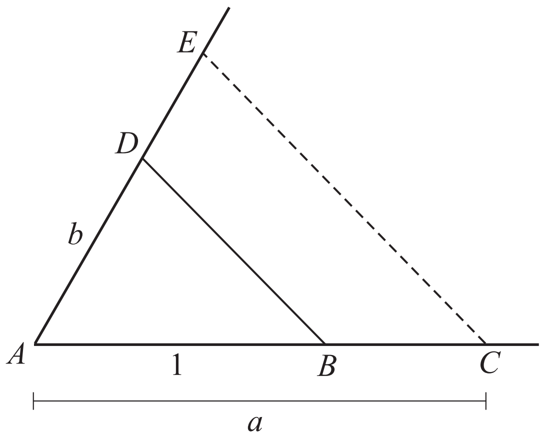
Øvelse 5.6

Argumentér for, at tallet $2-\sqrt{3}$ er konstruérbart.

Næste punkt kunne være at overveje hvorvidt produktet af de to konstruérbare tal, også er konstruérbart; altså hvis a og b kan konstrueres, kan da også $a \cdot b$ konstrueres? Svaret er igen ja!

Konstruér en vilkårlig vinkel, for eksempel 60°, med toppunkt i A og brug passeren til at afsætte B, C og D på vinklens ben, så $|AB|=1$, $|AC|=a$ og $|AD|=b$, som det fremgår af nedenstående figur.

Figur 5.7



Den skraverede linje, parallel med DB og gående igennem C, kan herefter konstrueres (overvej!). Skæringspunktet med vinklens andet ben kaldes E.

Øvelse 5.8

Vis ved hjælp af teorien om ensvinklede trekanter, at $|AE|=a \cdot b$.

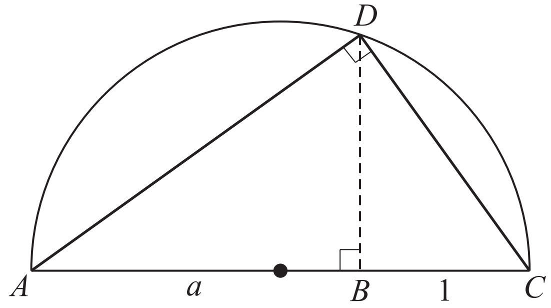
Øvelse 5.9

Vis, at hvis a og b er konstruérbare, så er også a/b konstruérbart.
Hjælp: Brug et lignende argument, som i tilfældet med et produkt.

Endelig gælder det, at hvis a kan konstrueres, så kan også $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) konstrueres.

Bevis: Afsæt $|AB| = a$ og $|BC| = 1$ i forlængelse af hinanden og konstruér en cirkel med centrum i midtpunktet mellem A og C og radius lig med halvdelen af stykket $|AC|$. Oprejs den vinkelrette i B og betegn skæringspunktet med cirklen med D. $\angle ADC$ er som bekendt ret, da det er en periferivinkel til en centervinkel på 180°.

Figur 5.10



Øvelse 5.11

Vis, at $|BD| = \sqrt{a}$ ved at udnytte, at ΔABD og ΔDBC er ensvinklede.

Dermed har vi bevist følgende sætning:

Sætning 5.12

Hvis a og b er konstruérbare tal, så er også $a+b,\ a-b,\ a \cdot b,\ a/b$ og $\sqrt{a}$ konstruérbare.

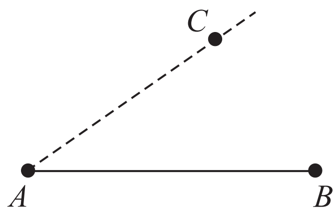
Med denne sætning i hånden kan vi ofte uden videre afgøre, om et tal kan konstrueres, uden at opfinde indviklede konstruktionsprocedurer. Tag for eksempel tallet $\sqrt{(2-\sqrt{3})/5}$. For at vise, at tallet kan konstrueres, er det ifølge sætningen altså nok at vise, at $(2-\sqrt{3})/5$ kan konstrueres. Igen bruges sætningen til at konkludere, at det er nok at vise, at både $2-\sqrt{3}$ og 5 kan konstrueres. Det sidste er ok. Det første tal kan også konstrueres, da både 2 og $\sqrt{3}$ kan konstrueres. Man kan vise, at ethvert konstruérbart tal fremkommer ved at starte med nogle hele tal, og derefter addere, subtrahere, multiplicere, dividere og/eller uddrage kvadratrødder. På næste side er vist et ”vanvittigt” eksempel på et konstruérbart tal.

$$\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{8}+2\sqrt{12}}}{\sqrt{11} - \sqrt{\dfrac{6}{1+\sqrt{8}}}}$$

6. Om at konstruere vinkler

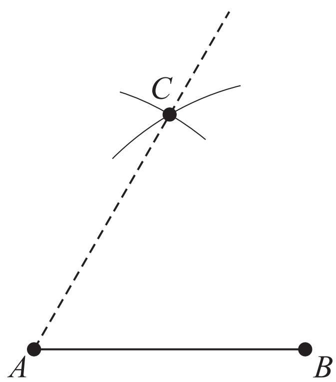
Lad der være givet to punkter, A og B. For at konstruere en vinkel på v grader i A og med AB som det ene ben, må vi nødvendigvis konstruere et punkt C på det andet ben.

Figur 6.1



At konstruere en vinkel på 90° kender vi, idet det svarer til at oprejse en *normal* i A. En vinkel på 60° er også nemt at konstruere, idet vi som C passende kan vælge skæringspunktet mellem to cirkelbuer med radius lig med afstanden mellem A og B og med centrum i henholdsvis A og B :

Figur 6.2



Øvelse 6.3

Konstruér en vinkler på 30° og 75°.

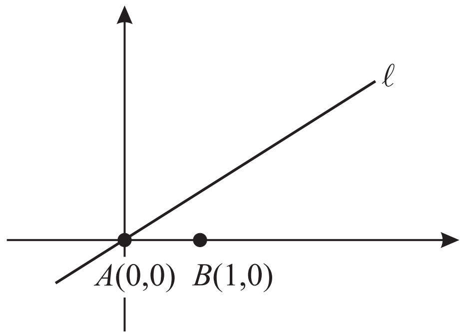
At halvere en given vinkel er som bekendt en let sag, men i hundredvis af år var det en sport blandt ”professionelle matematikere” af finde en procedure til at tredele vinkler. Først sent i det 19. århundrede blev det endeligt bevist, at dette ikke lader sig gøre generelt. Selvfølgelig kan man tredele nogle vinkler, for eksempel 90°: 30° er jo nemt at konstruere ifølge ovenstående. Men der findes altså vinkler, som ikke kan tredeles.

Sætning 6.4

Der findes vinkler, som ikke kan tredeles med passer og lineal.

Bevisskitse: Beviset, som er for kompliceret til at bringe i alle detaljer her, går ud på at vise, at der findes en vinkel v, således, at *ingen* af punkterne på linjen ℓ, med vinkel $\frac{1}{3}\cdot v$ i forhold til linjen igennem $A(0,0)$ og $B(1,0)$, kan konstrueres.

Figur 6.5



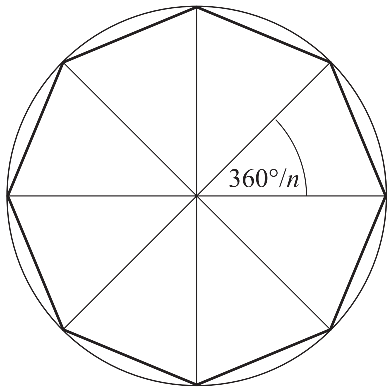
Faktisk kan vinklen 60° ikke tredeles. Alle punkterne på linjen med vinkel 20° viser sig nemlig at have ”grimme koordinater”; altså koordinater, der ikke kan konstrueres.

7. Regulære polygoner

Definition 7.1

En *regulær n-kant* er en n-kant, som kan indskrives i en cirkel, så alle hjørnerne ligger på periferien, og så alle siderne er lige lange. Det sidste medfører, at vinklen ind til centrum imellem to på hinanden følgende hjørner altid er den samme, nemlig $360°/n$, illustreret på figur 7.2.

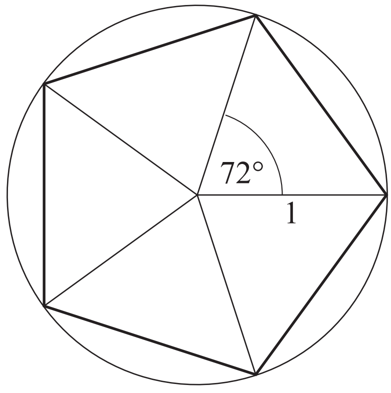
Figur 7.2



Når vi for et givet n ønsker at afgøre om der findes en regulær n-kant, kan vi nøjes med at søge efter én, som er indskrevet i en *enhedscirkel*, altså i en cirkel med radius 1. Der eksisterer nemlig en regulær n-kant hvis og kun hvis der eksisterer en n-kant indskrevet i en enhedscirkel. Dette fremgår klart af, at hvis man har en regulær polygon med det betragtede antal kanter, så kan man hurtigt konstruere en, som er indskrevet i en enhedscirkel ved først at bestemme "centrum" i polygonen, tegne linjer (stråler) fra dette centrum ud til hvert polygonhjørne og til sidst tegne en enhedscirkel med centrum i polygonens centrum til skæring med ovennævnte stråler. Så haves hjørnerne i den ønskede "enhedspolygon".

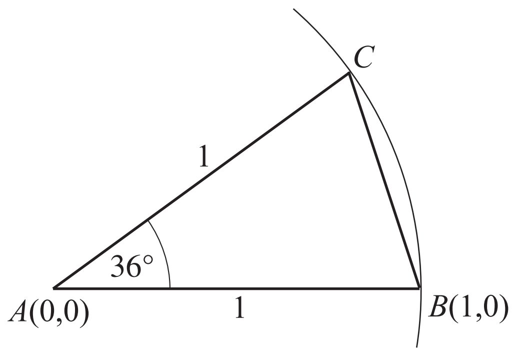
For at konstruere en regulær *femkant* må vi være i stand til at konstruere en vinkel på $360°/5 = 72°$.

Figur 7.3



Her viser det sig nemmere først at se på konstruktionen af den halve vinkel, 36°. Det sætter os i stand til at konstruere den regulære 10-kant. Den regulære femkant fås derefter ved kun at forbinde hvert andet hjørne af 10-kanten, på cirkelperiferien.

Figur 7.4

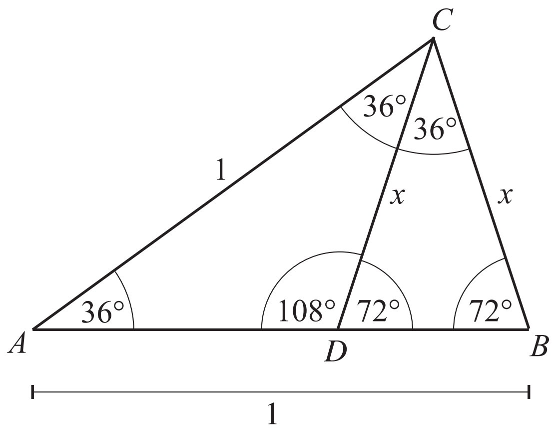


Vi ville være godt på vej, hvis vi bare kunne konstruere tallet svarende til afstanden fra *B* til *C*, for så kunne vi med den afstand i passeren og centrum i *B*, konstruere en cirkel, som skærer enhedscirklen i *C*. Men hvor stort er tallet $x = |BC|$?

Øvelse 7.5

For at finde frem til kantlængden kan man først lave en passende hjælpelinje *CD* i ΔABC. Vis, at vinklerne er som anført på nedenstående figur.

Figur 7.6



Øvelse 7.7

Argumentér for, at $|AD| = x$ og $|DB| = 1 - x$.

Eftersom ΔBCD er ensvinklet med ΔABC, har vi følgende forhold mellem siderne:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

Dette er en andengradsligning med løsningerne $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$ og $\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{5}-1)$. Den sidste løsning kasseres, da den er negativ. Dermed haves $x=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$. Sætning 5.12 giver os straks, at dette tal er konstruérbart, da $\sqrt{5}$, 1 og $\frac{1}{2}$ er det.

Øvelse 7.8

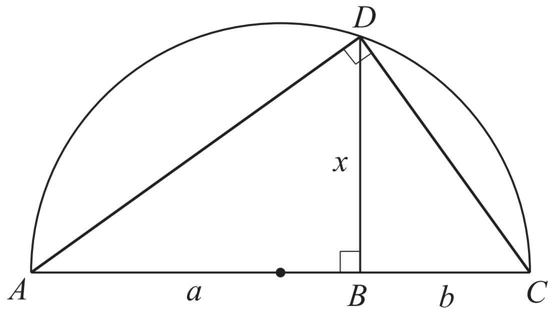
Konstruér tallet $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$. Konstruér derefter den regulære 10-kant ved at "løbe" rundt på enhedscirklen med denne afstand i passeren.

8. Om at kvadrere geometriske figurer

Et af de emner, grækerne beskæftigede sig med var, givet en geometrisk figur, at konstruere et kvadrat med det samme areal. Dette kaldes at *kvadrere* den geometriske figur, og emnet kaldes *kvadratur*.

Hvis vi for eksempel skal kvadrere et rektangel med siderne *a* og *b*, så skal vi altså konstruere et kvadrat med areal $a\cdot b$. Vi er altså sat overfor den opgave at konstruere tallet $\sqrt{ab}$, som er sidelængden i kvadratet. Dette kan gøres med en variant af den metode, hvormed vi konstruerede $\sqrt{a}$ i afsnit 5.

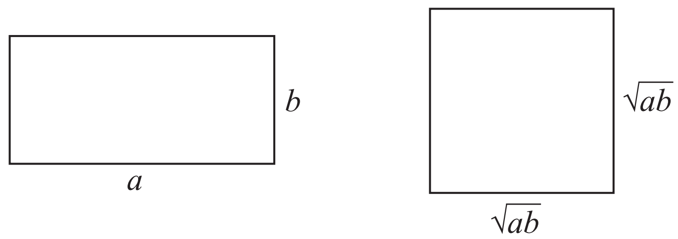
Figur 8.1



Afsæt stykkerne *a* og *b* i forlængelse af hinanden. Tegn cirklen med centrum i midtpunktet mellem *A* og *C* og radius $\frac{1}{2}\cdot|AC|$. Oprejs midtnormalen i *B*. Skæringspunktet med cirklen kaldes *D*. Da $\angle ADC$ er ret (vinklen er en periferivinkel til en centervinkel på 180°) er ΔABD ensvinklet med ΔBCD. Derfor haves:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \quad\Leftrightarrow\quad x^2=a\cdot b \quad\Leftrightarrow\quad x=\sqrt{ab}$$

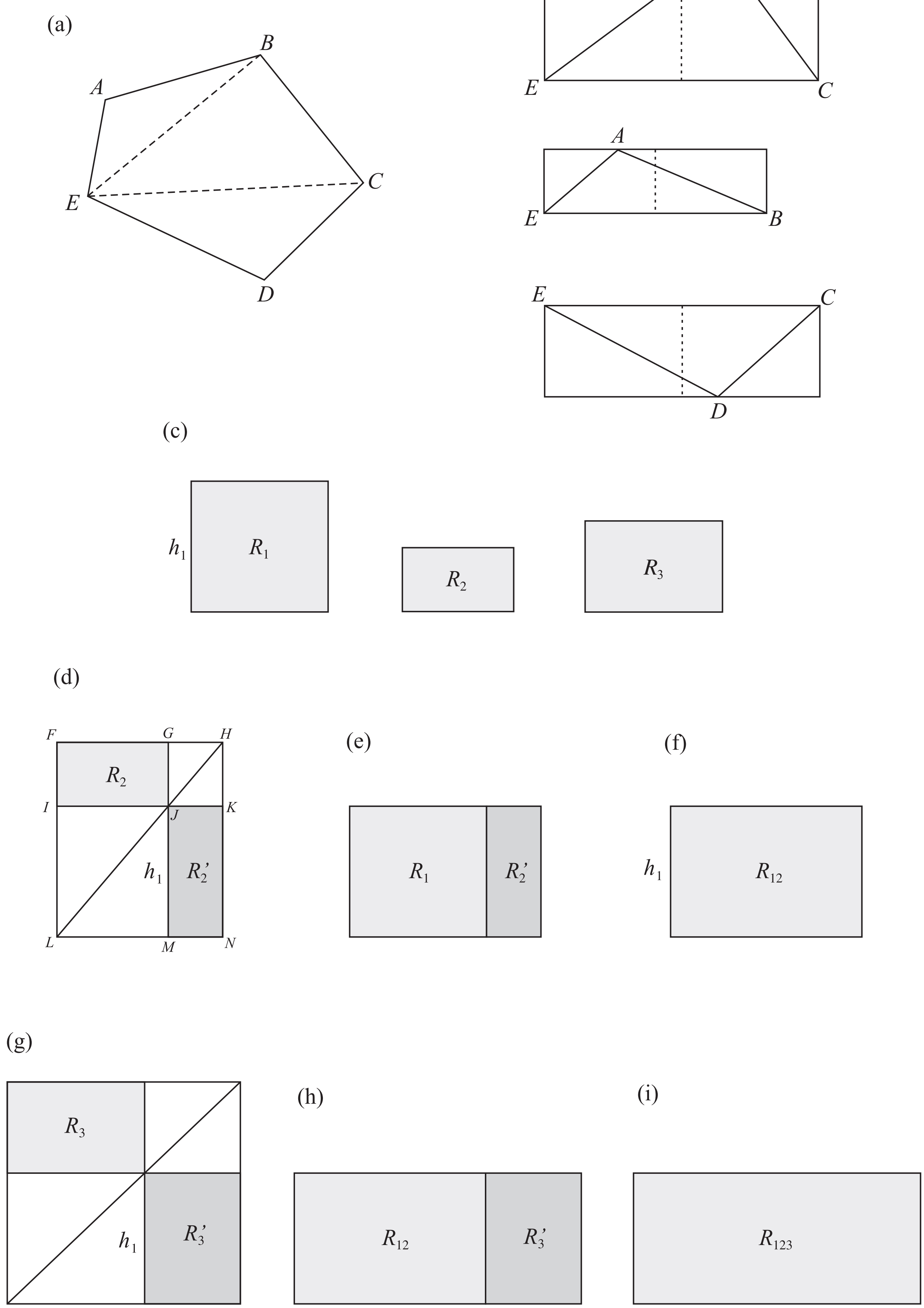
Figur 8.2



En lidt sværere opgave er det at kvadrere en polygon. Idéen til en løsning kan man se ved at betragte eksemplet med femkanten illustreret på figur 8.3 på næste side. Her en beskrivelse af løsningsmetoden:

1) Femkanten trianguleres i tre trekanter, som vist under (a).
2) For hver trekant konstrueres et ”omskreven rektangel” som vist under punkt (b). Hver af disse rektangler ”halveres” derefter ved konstruktion.
3) Hermed haves de tre rektangler vist under (c). Summen af deres arealer er lig med arealet af den oprindelige polygon. Idéen er nu at konstruere et rektangel R_{123}, hvis areal er lig med *summen* af arealerne af disse tre rektangler R_1, R_2 og R_3. Herefter kan metoden beskrevet i begyndelsen af afsnit 8 bruges til at konstruere et *kvadrat* med samme areal som R_{123}. Dermed vil polygonen være kvadreret!
4) Vi skal konstruere rektanglet R_{123} i to skridt. Først vil vi fremstille et rektangel R_{12} med areal lig med summen af arealerne af de to første rektangler. Når det er gjort, vil vi gentage metoden og konstruere rektanglet R_{123}, så det får et areal, der er lig med summen af arealerne af R_{12} og R_3.
5) For at konstruere R_{12} kan vi udskifte rektanglet R_2 med et nyt rektangel R_2' med samme areal, men med en højde, som er lig med højden af R_1. Derefter kan vi uden videre stille de to rektangler i forlængelse af hinanden, som det vises fra (e) til (f).
6) R_2' konstrueres ud fra R_2 på følgende måde, som illustreret under (d): Anbring R_2 et sted på papiret. Forlæng siden *GJ* stykket h_1 nedad. Konstruér en linje igennem *M*, parallel med *IJ*, til skæring med forlængelsen af *FI*. Skæringspunktet betegnes *L*. Tegn en linje igennem *L* og *J* til skæring med forlængelsen af *FG*. Skæringspunktet betegnes *H*. Konstruér en linje igennem *H*, parallel med linjestykket *GM* til skæring med forlængelsen af *LM*. Skæringspunktet betegnes *N*. Rektanglet *JKMN* er det ønskede rektangel.
7) Punkterne (g), (h) og (i) i figur 8.3 er en gentagelse af metoden under punkterne (d), (e) og (f). Her er det bare to andre rektangler, der ”adderes”.

Figur 8.3


(a)
A
B
C
D
E
(b)
B
E
C
A
E
B
E
C
D
(c)
h_1
R_1
R_2
R_3
(d)
F
G
H
I
J
K
L
M
N
R_2
h_1
R_2'
(e)
R_1
R_2'
(f)
h_1
R_{12}
(g)
R_3
h_1
R_3'
(h)
R_{12}
R_3'
(i)
R_{123}

Øvelse 8.4

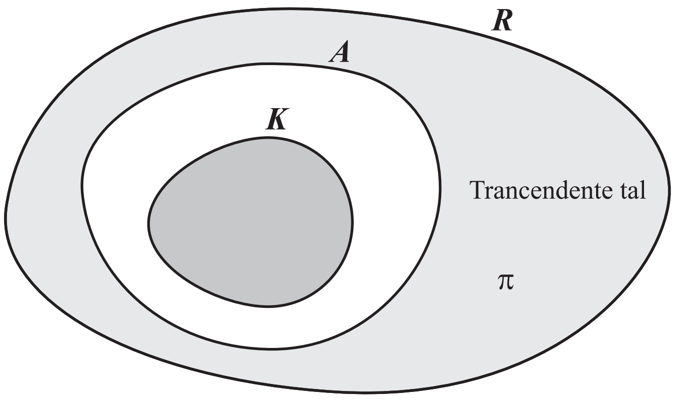
Argumentér for hvorfor konstruktionen illustreret i figur 8.3 (d) virkeligt giver et rektangel R_2' med samme areal som R_2.

Hjælp: Sammenlign først arealerne af følgende par af trekanter: ΔFHL og ΔLHN, ΔGHJ og ΔJHK, ΔIJL og ΔLJM.

9. Cirklens kvadratur

Et berømt problem består i at kvadrere en cirkel, for eksempel med radius 1. Da arealet i dette tilfælde er lig med $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$, skal vi altså konstruere et kvadrat med siden $\sqrt{\pi}$. I lang tid forsøgte folk at kvadrere cirklen, men på Arkimedes' tid (287 – 212 f.Kr.) var man nok overbevist om, at det var umuligt, uden at man dog var i stand til at bevise umuligheden. Dette lykkedes først i 1882 ved tyskeren *Ferdinand Lindemann* (1852 – 1939). Han beviste, at matematikkens vel mest berømte konstant, π, *ikke* er et *algebraisk* tal, dvs. tallet er ikke en rod i et polynomium med heltallige koefficienter. Tallet kaldes derfor *transcendent*. Da det viser sig, at mængden *K* af konstruérbare tal er en delmængde af mængden *A* af algebraiske tal, har man dermed vist, at π ikke kan konstrueres. Når π ikke kan konstrueres, så kan $\sqrt{\pi}$ heller ikke konstrueres (Overvej!). Altså har vi nedenstående sætning 9.2. På figur 9.1 repræsenterer *R* mængden af alle *reelle* tal.

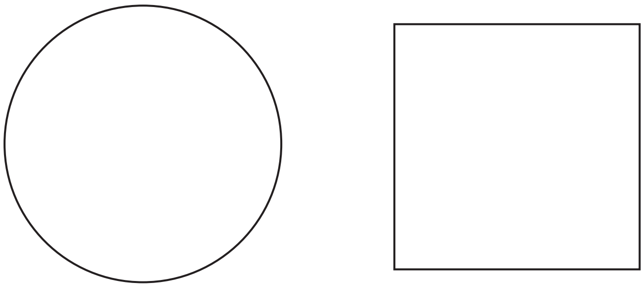
Figur 9.1



Sætning 9.2

Cirklen kan *ikke* kvadreres med passer og lineal.

Figur 9.3



10. Terningens fordobling

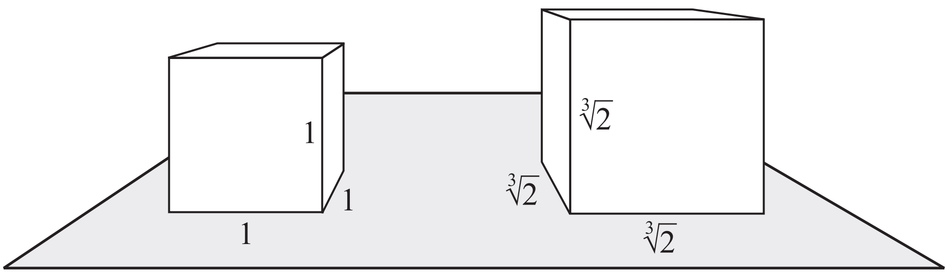
Denne opgave går undertiden under navnet *Det Deliske problem*. Ifølge en gammel legende går dette problem tilbage til det gamle Grækenland, hvor oraklet i Delfi påbød, at den deliske alterblok skulle fordobles.

Her går opgaven ud på følgende: Givet en terning, for eksempel med siden 1. Konstruér en terning med det dobbelte rumfang, dvs. 2. Altså skal en side på $\sqrt[3]{2}$ konstrueres. Platon anså *terningens fordobling* som et af de aller vigtigste emner, som matematikken skulle bruge kræfter på. Men først i 1837 blev umuligheden af konstruktion med passer og lineal af tallet $\sqrt[3]{2}$ endeligt bevist.

Sætning 10.1

Terningen kan *ikke* fordobles med passer og lineal.

Figur 10.2



11. Afsluttende kommentarer

Regulære polygoner

Allerede *Euklid* (ca. 300 f.Kr.) konstruerede den regulære femkant. Det var i lang tid uopklaret, hvilke regulære n-kanter, der kan konstrueres. Den 30. marts 1796, i en alder af knap 19 år, gjorde tyskeren *Carl Friedrich Gauss* (1777 – 1855) den bemærkelsesværdige opdagelse, at den regulære 17-kant *kan* konstrueres. Han var så glad for sin opdagelse, at han endte med at dedikere resten af sit liv til matematikken, efter at han i lang tid havde vaklet mellem det og så filologi (sprogvidenskab). Gauss var et universalgeni, som tidligt viste tegn på sine usædvanlige evner. Det fortælles for eksempel om ham, at han i en alder af kun 3 år opdagede en regnefejl i sin fars bogholderi. Siden kom han med banebrydende resultater indenfor mange områder af matematikken og regnes af nogle som værende en af de største matematikere igennem tiderne, sammen med Arkimedes og Newton. Også indenfor elektrodynamik og astronomi gjorde han sig gældende.

Gauss kom i øvrigt med den fuldstændige løsning til problemet med konstruérbare regulære polygoner, og den blev publiceret i hans værk *Disquisitiones arithmeticae* fra 1801. Jeg gengiver resultatet uden bevis i sætningen nedenfor.

Sætning 11.1

En regulær polygon med n sider kan konstrueres med passer og lineal, hvis og kun hvis n kan skrives på formen

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$$

hvor $m \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ og hvor $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ alle er forskellige primtal af formen $2^{2^s}+1$, hvor s er et naturligt tal.

Vi ser, at de ulige primtalsfaktorer skal være af formen $2^{2^s}+1$, dvs. 3, 5, 17, 257, 65537, ... For følgende værdier af $n \leq 20$ er en regulær n-kant konstruérbar: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20.

Den regulære 17-kant

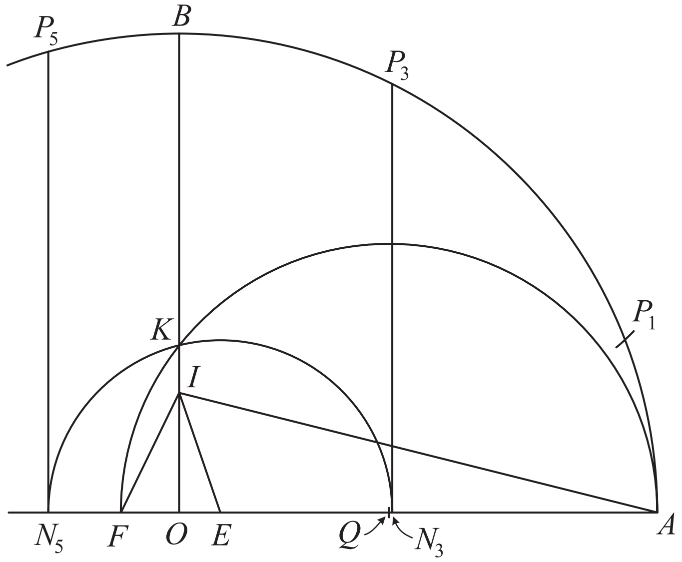
For at konstruere en vinkel på $360°/17$ skal vi konstruere et punkt på enhedscirklen med førstekoordinat lig med tallet

$$\frac{1}{16}\cdot\left[-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right]$$

Dette er ingenlunde let at vise: Se eventuelt [Ian Stewart] i litteraturlisten. Dette tal er klart konstruérbart ifølge sætning 5.12. Nedenstående fremgangsmåde til konstruktion af den regulære 17-kant skyldes *H. W. Richmond*.

Givet $A(1,0)$ og $B(0,1)$. Afsæt I, så $|OI| = \frac{1}{4}|OB|$ og derefter E, så $\angle OIE = \frac{1}{4}\cdot\angle OIA$. Afsæt F på x-aksen, så $\angle EIF$ bliver 45°. Tegn en cirkel med centrum i midtpunktet Q mellem F og A og radius lig med $|QA|$. Kald skæringspunktet mellem cirklen og y-aksen for K. Cirklen med centrum i E og radius $|EK|$ skærer x-aksen i punkterne N_5 og N_3. Oprejs normaler til x-aksen i disse punkter til skæringer med enhedscirklen i punkterne P_5 og P_3. Disse repræsenterer da henholdsvis 5. og 3. hjørne i den ønskede 17-kant. Det første hjørne P_1 fås da som skæringspunktet mellem en cirkel med centrum i P_3 og radius $|P_5P_3|$ og så enhedscirklen. Herudfra kan alle hjørnerne let konstrueres.

Figur 11.2



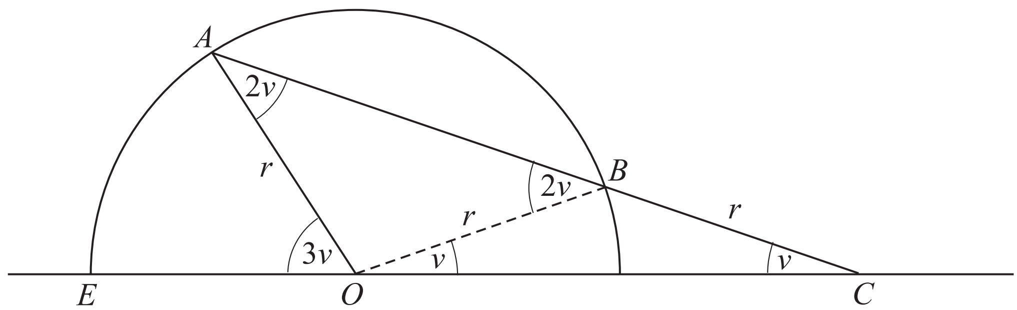
F. J. Richelot publicerede i 1832, i en række papirer, en konstruktionsprocedure for den regulære 257-kant. For at give endnu en antydning af matematikernes ihærdighed kan det nævnes, at Professor *Hermes* fra Lingen brugte 10 år på problemet med at finde en fremgangsmåde til konstruktion af den regulære 65537-kant!!

Vinkeltredeling

Vi har altså set, at det er umuligt generelt at tredele vinkler med passer og lineal. Hvis vi slækker lidt på, hvad der er tilladt, kan det derimod sagtens lade sig gøre at tredele vinkler. Faktisk findes der en mangfoldighed af forslag. Lad os se på et af de mest kendte: *Arkimedes' indskydningsmetode*.

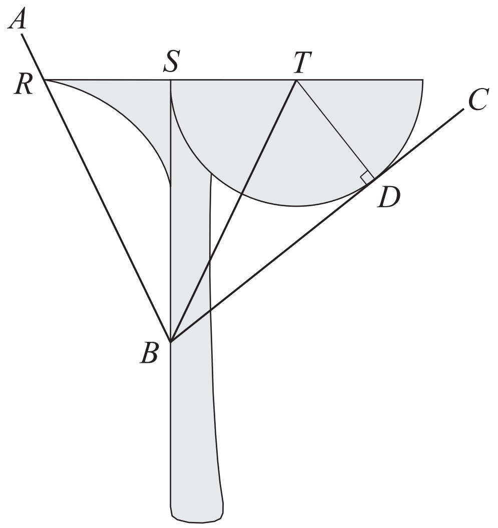
> Lad $\angle EOA$ være den givne vinkel. Tegn en cirkel med centrum i O og med en vilkårlig valgt radius. Kald skæringspunkterne med vinklens ben for A og E. Tag nu en lineal, hvorpå der er afsat to punkter med indbyrdes afstand lig med radius i cirklen. Tilpas nu linealens placering, så den går igennem A og således, at det ene mærke på linealen berører cirklen, og det andet mærke berører linjen gennem O og E. Kald disse skæringspunkter eller berøringspunkter for B og C. Vi ser ifølge tegningen, at $\angle ECB$ er en tredjedel af den givne vinkel, $\angle EOA$.

Figur 11.3



Et andet forslag til tredeling af en vinkel er den såkaldte *Tomahawk*. Opfinderen af denne metode er ukendt, men instrumentet var beskrevet i en bog fra 1835. Man lader vinklen *ABC* glide ned på plads med vinklens toppunkt *B* langs skaftet. Det fremgår umiddelbart af figuren på næste side, at dette giver anledning til en tredeling af $\angle ABC$ (Overvej!).

Figur 11.4

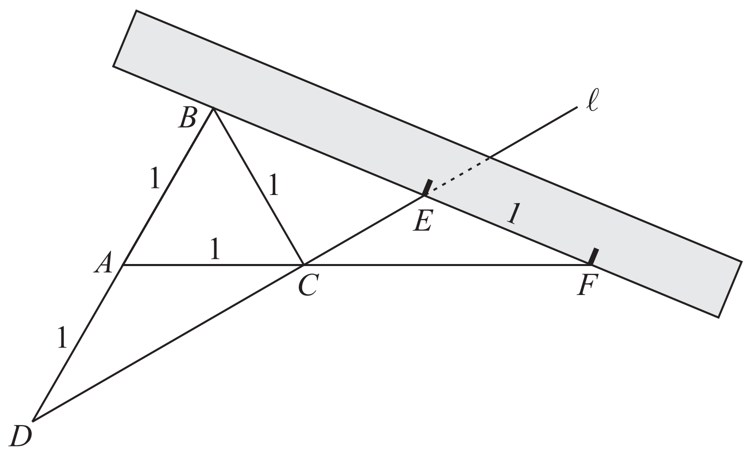


Terningens fordobling

Terningen kan ligeledes fordobles med en indskydningskonstruktion. Vi skal konstruere tallet $\sqrt[3]{2}$.

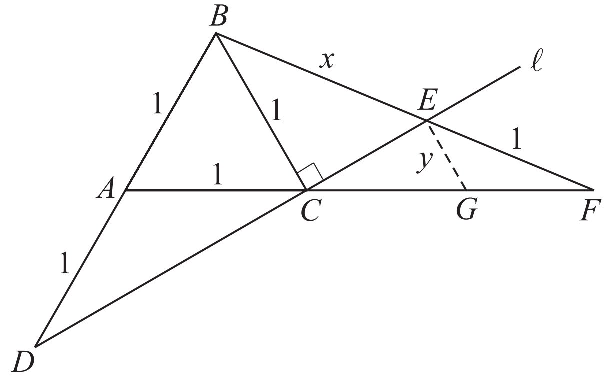
Start med at konstruere en ligesidet trekant ABC med sidelængde 1. Forlæng AB ud over A og afsæt herpå D, så $|AD| = 1$. Tegn en linjen ℓ gennem D og C. Afmærk to punkter med afstand 1 på linealen. Placér linealen, så den går igennem B, og så det ene punkt på linealen berører linjen ℓ og det andet punkt berører forlængelsen af linjestykket AC. Med betegnelserne på figuren er $|BE| = \sqrt[3]{2}$.

Figur 11.5



Bevis for at $|BE| = \sqrt[3]{2}$: Ved at regne på vinkler indses det let, at $\angle BCE = 90°$. Tegn linjen gennem *E* og parallel med *BC*. Skæringspunktet med forlængelsen gennem *A* og *C* betegnes *G*. Sæt $x = |BE|$ og $y = |EG|$.

Figur 11.6



Da ΔCGE er en 30-60-90 graders trekant vises det nemt, at $|CE| = \sqrt{3} \cdot y$. eftersom ΔEGF er ensvinklet med ΔBCF, fås

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{1+x}$$

Pythagoras' sætning anvendt på ΔBCE giver $1^2 + (\sqrt{3} \cdot y)^2 = x^2$. Indsættes *y* fra første ligning i sidste ligning og reducéres ligningen, fås $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$. Eftersom $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = (x+2)(x^3 - 2)$ ses det, at $\sqrt[3]{2}$ er den eneste positive løsning til denne ligning. Hermed er det ønskede vist.

□

Cirkelkvadratur

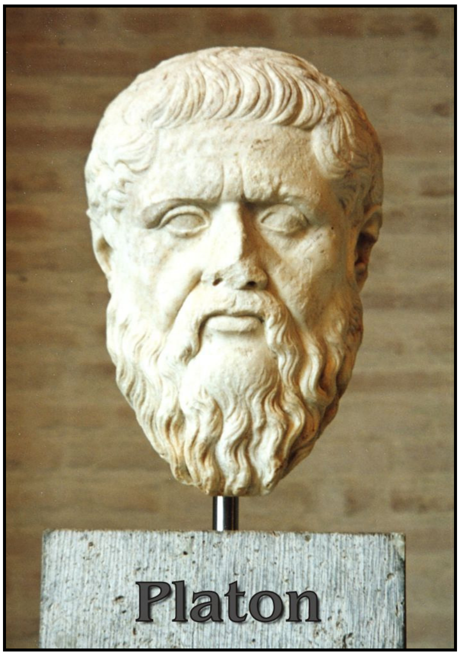
Det kan godt lade sig gøre at kvadrere cirklen såfremt man fraviger betingelsen om, at der kun må benyttes passer og lineal. Cirklen kan for eksempel kvadreres ved hjælp af *Arkimedes spiral*. Det er dog for specielt til at blive gennemgået her.

Amatørmatematikeres higen efter berømmelse

På trods af, at det endeligt er bevist, at de tre klassiske problemer (vinkeltredelingen, terningefordoblingen og cirkelkvadraturen) ikke kan løses med passer og lineal, er der stadig folk, som ikke tror på denne dom. De sidder måske og udtænker sindrige metoder i håbet om at høste berømmelse. Mange har i tidernes løb indsendt "løsninger" til universiteter og læreanstalter til bedømmelse. Ofte er argumenterne uklare og forvirrende, eller også bryder metoderne med de krav, der stilles til konstruktion med passer og lineal. Ofte vil indsenderne endda ikke godtage afvisningerne af deres "beviser". Mangen en universitetsprofessor har derfor fået livet forpestet af cirkelkvadratører etc. Allerede i 1775 blev det for meget for den højeste franske videnskabelige institution *l'Académie des Sciences*. Det blev bekendtgjort, at stedet ikke længere ville bedømme cirkelkvadraturer, vinkeltredelinger, terningefordoblinger og evighedsmaskiner. Akademiets sekretær, matematikeren *Condorcet*, skrev i begrundelsen for denne beslutning blandt andet følgende, citeret fra [Jesper Lützen] (Bemærk, at dette er før de endelige beviser for umuligheden!):

> Der går et udbredt rygte om, at regeringerne har udlovet en betragtelig belønning til den, som får løst cirklens kvadratur, og at dette problem er genstand for de mest berømte matematikeres undersøgelser; i tillid til disse rygter opgiver en masse mennesker, mange flere end man tror, deres nyttige arbejde for at hengive sig til udforskningen af dette problem, ofte uden at forstå det, og altid uden at have den nødvendige viden til at gennemføre løsningen med succes . . . Mange har det uheld at tro, at det er lykkedes, de benægter de argumenter, hvormed matematikerne bestrider deres løsninger, ofte kan de ikke forstå dem, og de ender med at beskylde dem for misundelse og uærlighed. Af og til udarter deres påståelighed til sandt galskab; men man betragter det næppe som sådant hvis den fikse idé, der udgør galskaben, ikke støder an mod accepterede meninger, hvis den ikke har indflydelse på livsførelsen, hvis den ikke forstyrrer samfundets orden. Kvadratørernes galskab har altså for dem selv ingen anden ulempe end tabet af tid, der ofte kunne være nyttig for deres familie, men desværre begrænses galskaben sjældent til et enkelt område, og vanen med at snakke ufornuftigt bider sig fast og breder sig, lige som vanen at ræsonnere rigtigt; det er det, der er sket med mere end én kvadratør.
> (*Histoire de l'Académie 1775 side 67*).

Figur 11.7



Figur 11.8

Figur 11.9

Carl Friedrich Gauss

12. Litteratur

Jesper Lützen. *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra.* Systime, 1985.

Asger Aaboe. *Episoder fra matematikkens historie*. 2. udgave. Borgens Forlag, 1986.

Heinrich Dörrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications Inc., 1965.

Paul Rantzau. *Alle tiders tal.* Politikens Forlag, København 1972.

Ian Stewart. *Galois Theory*. Chapman & Hall, oprindeligt 1982 (opr. 1973).

Howard Eves. *An Introduction to the History of Mathematics*. 4. edition. Holt, Rinehart & Winston, 1976.

John Stillwell. *Mathematics and Its History*. Springerverlag, New York, 1989.

Eric Bainville, Bernard Genevés. *Constructions Using Conics*. The Mathematical Intelligencer (tidsskrift), vol. 22, no. 3, 2000.