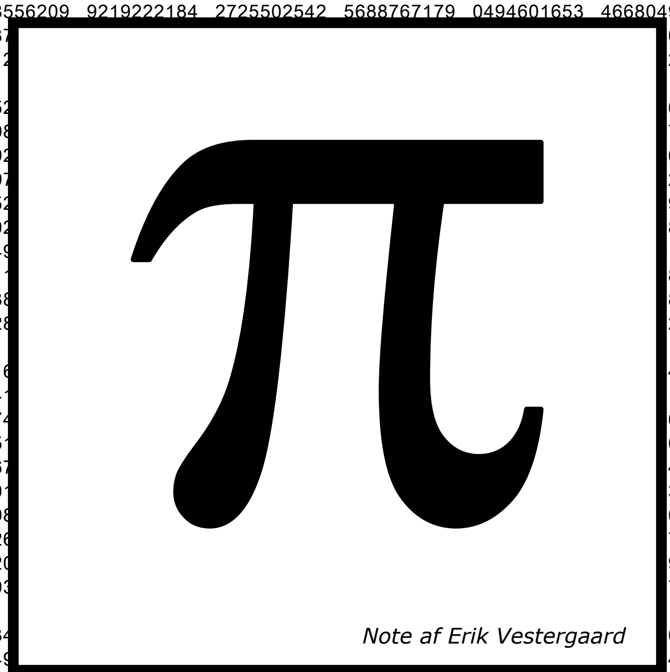
3,
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744 9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511 2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745 5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955
3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356 6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548 1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542 5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383
8279679766 8145410095 38837 0424 1965285022 2106611863
0674427862 2039194945 04712 2645 9958133904 7802759009

9465764078 9512694683 98352 6401 3639443745 5305068203
4962524517 4939965143 14298 7549 8930161753 9284681382
6868386894 2774155991 85592 6222 6260991246 0805124388
4390451244 1365497627 80797 2258 2848864815 8456028506
0168427394 5226746767 88952 9803 5593634568 1743241125
1507606947 9451096596 09402 8680 9208747609 1782493858
9009714909 6759852613 65549 1323 7964145152 3746234364
5428584447 9526586782 10511 8711 0145765403 5902799344
0374200731 0578539062 19838 8481 0053706146 8067491927
8191197939 9520614196 63428 2397 4894090718 6494231961



Note af Erik Vestergaard

5679452080 9514655022 52316 4672 2182562599 6615014215
0306803844 7734549202 60541 1734 6496514539 0579626856
1005508106 6587969981 63574 6771 5770042033 7869936007
2305587631 7635942187 31251 0957 5270695722 0917567116
7229109816 9091528017 35067 4421 0067510334 6711031412
6711136990 8658516398 31501 3455 2833163550 7647918535
8932261854 8963213293 30898 0992 4488957571 2828905923
2332609729 9712084433 57326 7589 8524374417 0291327656
1809377344 4030707469 21120 9838 9522868478 3123552658
2131449576 8572624334 41893 7162 0105265227 2111660396

6655730925 4711055785 37634 0729 3606598764 8611791045
3348850346 1136576867 53249 4318 5867697514 5661406800
7002378776 5913440171 2749470420 5622305389 9456131407 1127000407 8547332699 3908145466 4645880797 2708266830
6343285878 5698305235 8089330657 5740679545 7163775254 2021149557 6158140025 0126228594 1302164715 5097925923
0990796547 3761255176 5675135751 7829666454 7791745011 2996148903 0463994713 2962107340 4375189573 5961458901
9389713111 7904297828 5647503203 1986915140 2870808599 0480109412 1472213179 4764777262 2414254854 5403321571
8530614228 8137585043 0633217518 2979866223 7172159160 7716692547 4873898665 4949450114 6540628433 6639379003
9769265672 1463853067 3609657120 9180763832 7166416274 8888007869 2560290228 4721040317 2118608204 1900042296
6171196377 9213375751 1495950156 6049631862 9472654736 4252308177 0367515906 7350235072 8354056704 0386743513
6222247715 8915049530 9844489333 0963408780 7693259939 7805419341 4473774418 4263129860 8099888687 4132604721

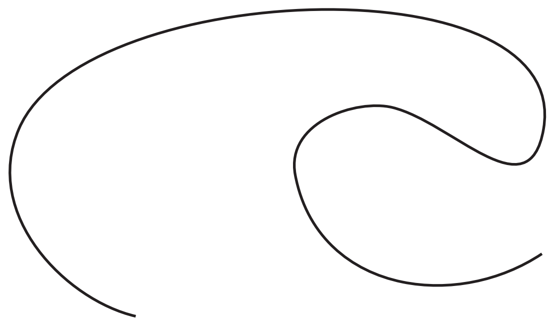
5695162396 5864573021 6315981931 9516735381 2974167729 4786724229 2465436680 0980676928 2382806899 6400482435
4037014163 1496589794 0924323789 6907069779 4223625082 2168895738 3798623001 5937764716 5122893578 6015881617
5578297352 3344604281 5126272037 3431465319 7777416031 9906655418 7639792933 4419521541 3418994854 4473456738
3162499341 9131814809 2777710386 3877343177 2075456545 3220777092 1201905166 0962804909 2636019759 8828161332
3166636528 6193266863 3606273567 6303544776 2803504507 7723554710 5859548702 7908143562 4014517180 6246436267
9456127531 8134078330 3362542327 8394497538 2437205835 3114771199 2606381334 6776879695 9703098339 1307710987
0408591337 4641442822 7726346594 7047458784 7787201927 7152807317 6790770715 7213444730 6057007334 9243693113
8350493163 1284042512 1925651798 0694113528 0131470130 4781643788 5185290928 5452011658 3934196562 1349143415
9562586586 5570552690 4965209858 0338507224 2648293972 8584783163 0577775606 8887644624 8246857926 0395352773
4803048029 0058760758 2510474709 1643961362 6760449256 2742042083 2085661190 6254543372 1315359584 5068772460

2901618766 7952406163 4252257719 5429162991 9306455377 9914037340 4328752628 8896399587 9475729174 6426357455
2540790914 5135711136 9410911939 3251910760 2082520261 8798531887 7058429725 9167781314 9699009019 2116971737
2784768472 6860849003 3770242429 1651300500 5168323364 3503895170 2989392233 4517220138 1280696501 1784408745
1960121228 5993716231 3017114448 4640903890 6449544400 6198690754 8516026327 5052983491 8740786680 8818338510
2283345085 0486082503 9302133219 7155184306 3545500766 8282949304 1377655279 3975175461 3953984683 3936383047
4611996653 8581538420 5685338621 8672523340 2830871123 2827892125 0771262946 3229563989 8989358211 6745627010
2183564622 0134967151 8819097303 8119800497 3407239610 3685406643 1939509790 1906996395 5245300545 0580685501
9567302292 1913933918 5680344903 9820595510 0226353536 1920419947 4553859381 0234395544 9597783779 0237421617
2711172364 3435439478 2218185286 2408514006 6604433258 8856986705 4315470696 5747458550 3323233421 0730154594
0516553790 6866273337 9958511562 5784322988 2737231989 8757141595 7811196358 3300594087 3068121602 8764962867

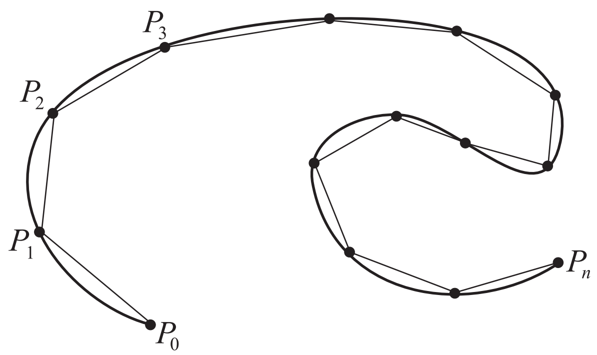
1. Kurvelængde

Før vi går i gang med at behandle emnet pi, skal vi tale om, hvordan man bestemmer *længden* af en kurve. Man kan forestille sig at bestemme længden ved at tilpasse et stykke snor langs kurven og derefter måle snorens længde med en lineal. En anden og mere teoretisk brugbar metode er at tilnærme kurven med en *uendelig følge af polygoner*. Den første polygon i følgen fremkommer ved at placere en række punkter på kurven og forbinde disse med rette linjestykker. Nu tilføjer vi yderligere nogle punkter og forbinder alle de hidtidige punkter med linjestykker, hvorved vi får den næste polygon, etc. Jo mere ”finmasket” vi inddeler kurven i punkter, jo tættere vil polygonens længde være på kurvens længde. Grænseværdien af polygonernes længder vil være lig med kurvens længde.

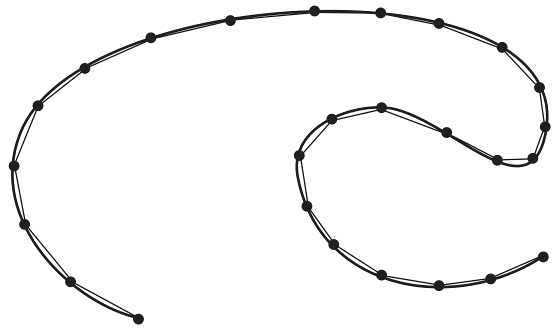
Kurve, hvis længde ønskes bestemt



Kurve med grov polygonapproksimation



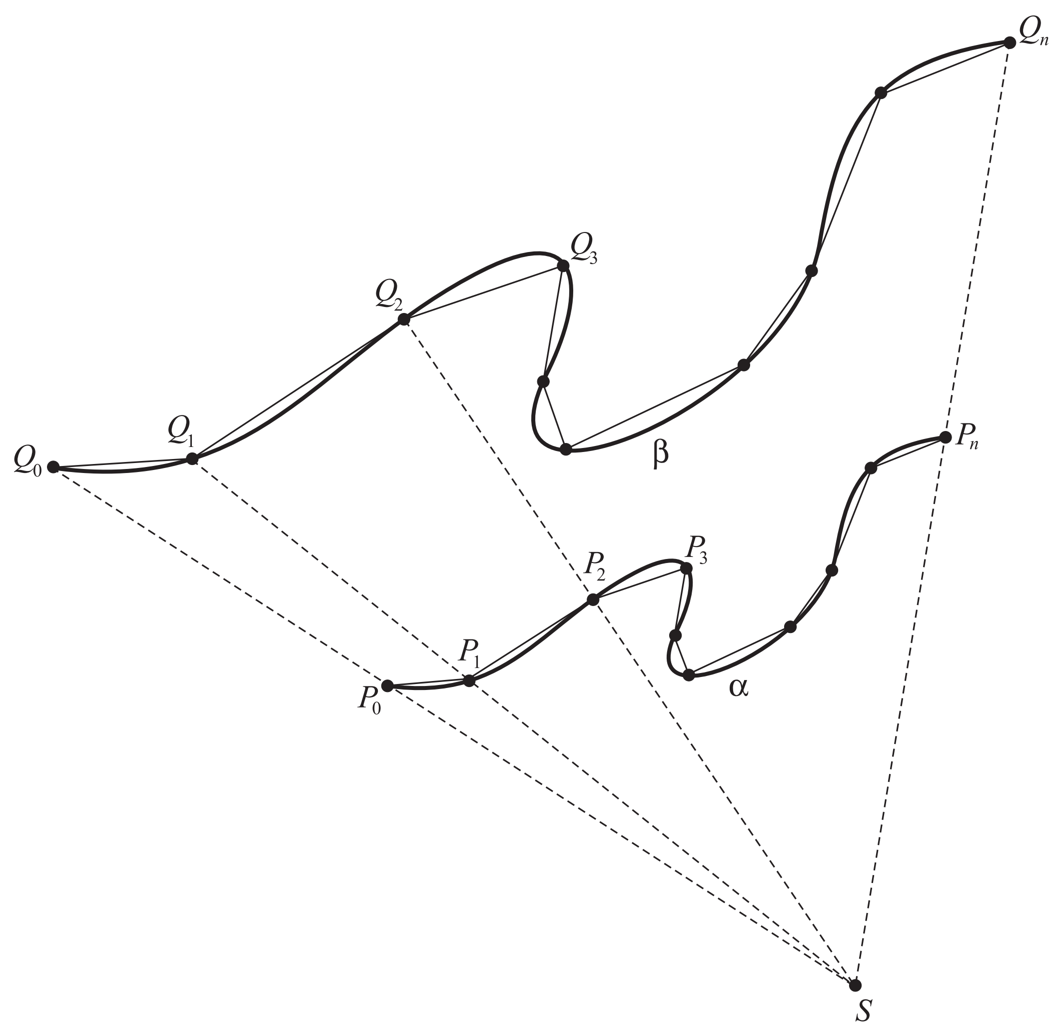
Kurve med finere polygonapproksimation



Definition 1.1 (Multiplikation omkring et punkt)

Hvis man har en kurve α, så kan man få en ny kurve β ved at *multiplicere* α med en konstant k udfra et punkt S. Hermed menes følgende: For et punkt P på α tegnes en halvlinje fra S gennem P. Anbring nu et punkt Q på halvlinjen, så Q's afstand fra S er k gange så stor som P's afstand fra S. Gør man dette for *ethvert* punkt P på α, får man en mængde af Q-punkter – disse udgør kurven β.

Situationen er illustreret på figuren nedenfor. Her er også afsat nogle eksempler: Punktet P_0 på α giver anledning til punktet Q_0 på β, punktet P_1 på α giver anledning til punktet Q_1 på β etc. På figuren er også tegnet polygonapproksimationen $P_0P_1\cdots P_n$ til α og polygonapproksimationen $Q_0Q_1\cdots Q_n$ til kurven β. Ved at studere ensvinklede trekanter får man endvidere, at polygonen $Q_0Q_1\cdots Q_n$ har en længde, der er k gange så stor som længden af $P_0P_1\cdots P_n$. Ved hjælp af en uendelig følge af polygonapproksimationer kan man herefter ret nemt vise, at længden af kurven β er præcis k gange så stor som længden af kurven α.



Definition 1.2

Tallet π er defineret som omkredsen af en cirkel med diameter 1.

Sætning 1.3

For enhver cirkel gælder det, at *forholdet* mellem en cirkels omkreds og dens diameter er lig med π.

"Bevis": En cirkel $\mathcal{C}_d$ med diameter d kan klart fås ved at multiplicere en cirkel $\mathcal{C}_1$ med diameter 1 udfra dets centrum – med en faktor d. Lad O_d og O_1 være omkredsene af henholdsvis $\mathcal{C}_d$ og $\mathcal{C}_1$. Ifølge overvejelserne med kurvelængde ovenfor vil der derfor gælde: $O_d = d \cdot O_1$. Men per definition er $O_1 = \pi$. Heraf det ønskede:

$$\frac{O_d}{d} = \pi$$

□

2. Cirklen tilnærmes med polygoner

Allerede meget tidligt i historien fandt man ud af, at forholdet mellem omkredsen og diameteren af en cirkel altid er det samme. De første kendte værdier for dette forhold går tilbage til *babylonerne* og *ægypterne* for mere end 3500 år siden. Her fandt man blandt andet værdierne henholdsvis $3\tfrac{1}{8} = 3{,}125$ og $4 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16049$. Vi skal dog ikke komme nærmere ind på dette her. Den første rigtigt sobre udledning af en vurdering af pi skyldes oldtidens største matematiker, grækeren *Archimedes* (287 f.Kr. – 212 f.Kr.), som tilnærmede en cirkel indefra og udefra med regulære polygoner, og efter snedige formler og udregninger fandt frem til, at

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}$$

Med en regulær polygon menes en polygon, hvor hjørnerne alle ligger på en cirkel og hvor alle siderne har samme længde. Det er forholdsvist oplagt, at cirklens omkreds er større end omkredsen af den indskrevne polygon, men mindre end omkredsen af den omskrevne polygon. Lad n betegne antallet af sider i polygonen. Ved at vælge n større og større vil omkredsene af de indskrevne regulære polygoner og de omskrevne regulære polygoner nærme sig til cirklens omkreds. For at beregne omkredsene af n-polygonerne brugte Archimedes specielle beregninger, som vi ikke skal komme nærmere ind på her. Bemærk, at vi ovenfor støder på tallet $3\tfrac{1}{7} = \tfrac{22}{7}$, som mange tror er den eksakte værdi for π. Det er imidlertid *ikke* rigtigt — det er kun en god tilnærmelse til π.

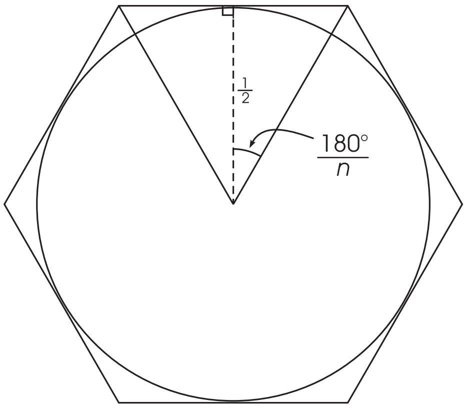
Omkreds af omskreven polygon

Omkreds af indskreven polygon

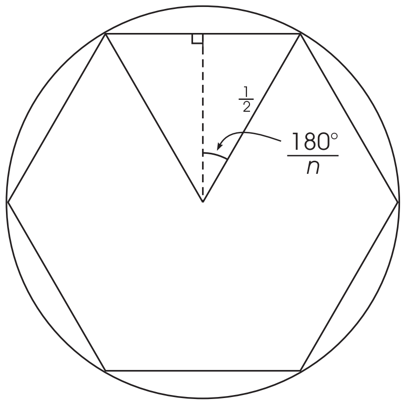
$$P_O = n \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

n : antal sider i polygon

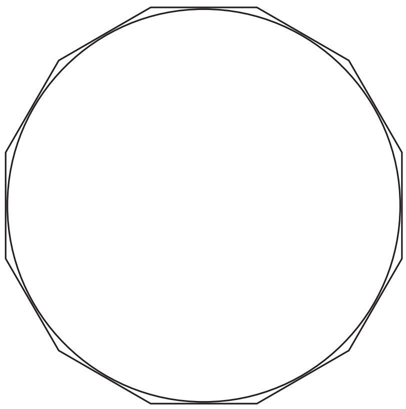
$$P_i = n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$



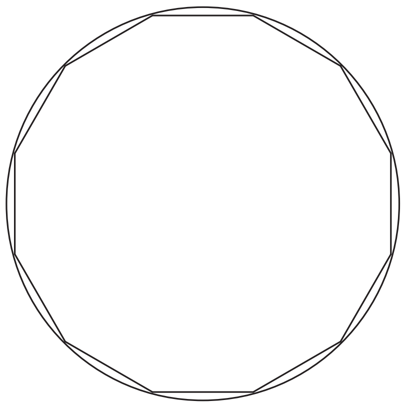
$n=6$



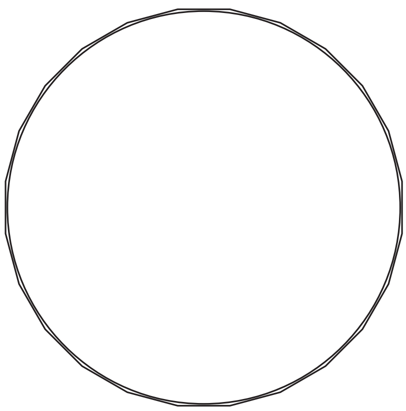
$P_O = 3{,}464...$ $\quad$ $P_i = 3{,}000...$



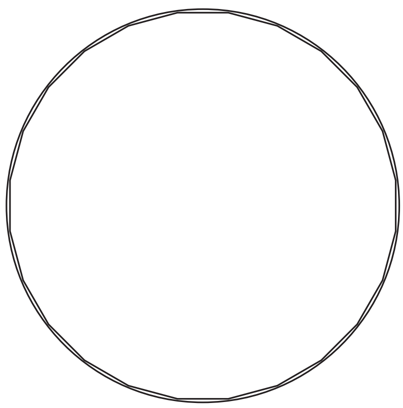
$n=12$



$P_O = 3{,}215...$ $\quad$ $P_i = 3{,}105...$



$n=24$



$P_O = 3{,}159...$ $\quad$ $P_i = 3{,}132...$

Archimedes (287-212 f.Kr.)

På forrige side ses, hvordan cirklen tilnærmes bedre og bedre med regulære polygoner indefra, såvel som udefra. Der er angivet formler for henholdsvis omkredsen P_O af den omskrevne regulære n-polygon og omkredsen P_i af den indskrevne regulære n-polygon. Ved hjælp af de trigonometriske funktioner *sinus* og *tangens* skal vi finde en tilnærmet værdi for π, og vi skal tillige analysere, hvor godt tilnærmelserne egentlig er. Archimedes havde selvfølgelig ikke de trigonometriske funktioner til rådighed.

Øvelse 2.1

Argumentér for formlerne for P_O og P_i.

Øvelse 2.2

a) Vi skal se på Archimedes' tilfælde, hvor $n = 96$. Benyt formlerne for P_O og P_i til at bestemme en øvre og nedre grænse for π. Bemærk, at man ikke får Archimedes' værdier, eftersom han foretog nogle yderligere simplifikationer undervejs i sine vurderinger!

b) Udregn gennemsnittet af øvre og nedre grænse fra a) og benyt det som din tilnærmede værdi for π.

c) Hvor meget kan din værdi fra b) højst være forkert?

d) I det følgende forestiller jeg mig, at du som en tilnærmet værdi for π, vælger gennemsnittet af øvre og nedre grænse – ligesom under b). Hvor stor skal n være, for at fejlen på din værdi for π med sikkerhed bliver mindre end 1/1.000.000, altså så 6 decimaler på beregningen af π er korrekte: Prøv dig frem på lommeregneren. Hvis du har en grafregner kan du eventuelt lave en tabel over funktionsværdier for P_O og P_i som funktion af n.

Idéen med at tilnærme en cirkel med polygoner indefra og udefra for at bestemme en tilnærmet værdi for pi blev anvendt helt op til 1500-tallet, altså i mere end 1700 år efter Archimedes' død. Herefter kom nye metoder på banen: *Uendelige rækker* og *uendelige produkter*. Blandt andet viste englænderen *John Wallis* (1616 – 1703) i 1655 følgende formel, hvori pi indgår:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots} \quad (1)$$

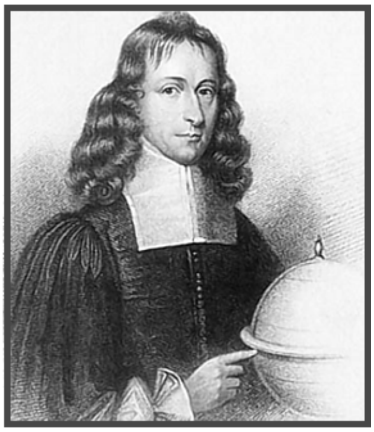
Der er tale om et uendeligt produkt. Resultatet var mere af teoretisk interesse, idet det viser sig, at formlen *ikke* er særlig velegnet til at beregne p med stor nøjagtighed.

Lidt senere blev en uendelig række fundet til bestemmelse af pi:

(2) $$\pi = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

Formlen blev i 1674 opdaget af den berømte tyske matematiker *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716). Denne række er et specialtilfælde af en række, som allerede i 1671 blev opdaget af englænderen *James Gregory* (1638 – 1675). Det overlades til læseren at finde systemet i rækken, dvs. at gætte de led, der ligger efter 1/9. Gregory-Leibniz rækken ovenfor viste sig desværre heller ikke at være så velegnet til at bestemme pi med stor præcision.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)



James Gregory (1638-1675)

3. Uendelige rækker

Det er på tide, at vi stopper lidt op for at studere det nye vidunder: en *uendelig række*. Dette gøres bedst ved at overveje nogle eksempler. Det ses klart, at den nedenstående række, hvor man bliver ved med at lægge 1 til, ikke nærmer sig til noget tal – den går mod uendelig:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

Øvelse 3.1

Overvej, om nedenstående rækker nærmer sig til noget tal eller ej.

a) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

b) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$

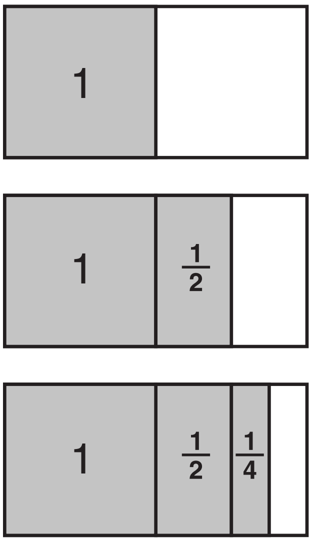
Der findes ikke nogen regel, der i alle tilfælde kan afgøre, om en uendelig række nærmer sig til et tal. Nogle metoder kan bruges i bestemte situationer, men selv hvis man har afgjort, at en række nærmer sig til et tal — i matematisk sprog siger vi, at rækken *konvergerer* — så kan det være en meget svær opgave at finde ud af, hvad det er for et tal, den nærmer sig til. I nogle tilfælde er det dog ikke så svært, bare man ser på problemet på den rigtige måde, som nedenstående.

Øvelse 3.2

Afgør, hvad følgende række nærmer sig til:

(3)
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

idet du for hvert led, du yderligere tilføjer, indtegner et areal svarende til tallet:



□

Tilbage til rækken (2). Jo flere led, der medtages, jo mere nøjagtig bliver beregningen af π. Det viser sig, at for at få en nøjagtighed på bare 6 decimaler, ligesom i øvelse 2, så skal der omtrent en halv million led til, så selv om man bruger en computer, er denne formel ikke særlig god til vort formål.

I 1706 fandt *John Machin* (1680 – 1752), professor i astronomi i London, en anden formel, som består af to uendelige rækker:

(4)
$$\pi = 16\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\cdot 5^{2n-1}} + \ldots\right)$$
$$- 4\cdot\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)\cdot 239^{2n-1}} + \ldots\right)$$

Bemærk, at jeg i hver delrække har angivet et udtryk for det n'te led. Formlen (4) viser sig langt mere hensigtsmæssig til at udregne π med mange decimaler, da de enkelte led i delrækkerne meget hurtig bliver små. I det følgende skal du eksperimentere lidt med ovennævnte formler. Dertil får du brug for et regneark.

Øvelse 3.3

Vi skal se lidt på, hvor langsom rækken (2) egentligt konvergerer. Hvis man i rækken bortskærer alle led efter det n'te led, får man *afsnitssummen*

(5) $$s_n = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \right)$$

(6) $$s_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1}$$

Ligning (6) er velegnet til brug i forbindelse med regneark, idet den blot udtrykker, at man får den nye afsnitssum (den n'te) ved at lægge det n'te led til den forrige afsnitssum (den (n–1)'te). Nedenfor ses regnearket. Du skal lave to søjler. Den ene med overskrift n og den anden med overskrift s_n. Du skal sørge for, at der er i første søjle står tallene fra 1 til 100 – der er kun vist til 5 på figuren! I feltet B2 skriver du tallet 4, idet s_1 er lig med 4. I feltet B3 skal du så udnytte ligning (6) ved at skrive formlen

=B2+(-1)^(A3-1)*4/(2*A3-1)

idet A3 og B2 indeholder henholdsvis værdien af n og s_{n-1}, for $n = 2$. Herefter *nedkopierer* du formlen i resten af søjlens felter indtil felt B101, Hvor tæt er s_{100} på pi?

	A	B
1	n	s_n
2	1	4
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	

=B2+(-1)^(A3-1)*4/(2*A3-1)

□

Definition 3.4

For at gøre opskrivningen mere handy fremover vil vi indføre en kortfattet notation for en uendelig række ved hjælp af det store græske bogstav *sigma*:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Tegnet kaldes også for et *summationstegn*. Det hentyder til, at man skal lade *i* løbe fra begyndelsesværdien angivet under summationstegnet til slutværdien angivet over summationstegnet, i skridt på 1. Man skal så lægge alle de fremkomne a_i'er sammen. I første tilfælde har vi en *uendelig* række, mens vi i det næste tilfælde har en *endelig* række. I den nederste række har vi skåret alle leddene fra $i = n+1$ og opefter fra. Som tidligere antydet kalder vi det for den *n*'te *afsnitssum* af den øverste række.

Definitioner 3.5

a) En række kaldes *alternerende* såfremt dens led skiftevis er positive og negative.
b) En uendelig række, som nærmer sig til et bestemt tal, kaldes *konvergent*.

Sætning 3.6

Givet en alternerende og konvergent række

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

hvor leddene numerisk set aldrig vokser, dvs. hvor $|a_1| \geq |a_2| \geq \ldots \geq |a_n| \geq \ldots$. Da vil forskellen på summen *s* og afsnitssummen s_n højst være lig med den numeriske værdi af det først bortkastede led a_{n+1}, altså:

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

Der vil først blive givet et bevis for denne sætning under afsluttende kommentarer. På dette sted skal vi blot se et eksempel på sætningens anvendelse.

Eksempel 3.7

Betragt den uendelige række

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i^2} + \ldots$$

Denne uendelige række kan vises at være konvergent – ja faktisk kan man vise, at den nærmer sig til (*konvergerer mod*) tallet $\frac{1}{8}\pi^2$. Dette er dog svært at vise. Hvad sætning 3.6 imidlertid siger, er følgende: Da rækken vides at være konvergent, og fordi dens led hele tiden skifter fortegn, og fordi leddene bliver numerisk mindre og mindre, så vil

$$|s - s_4| \le |a_5| \quad \Leftrightarrow \quad \left| s - \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) \right| \le \frac{1}{5^2}$$

bare for at tage et eksempel! Hvis man smider leddene fra og med det femte led bort, så begår man altså højst en fejl på $\frac{1}{25}$.

□

Øvelse 3.8

a) Forklar, hvorfor den uendelige række (2) adlyder kravene i sætning 3.6, og benyt derefter sætningen til at vurdere den maksimale fejl man begår, hvis man bruger s_{100} (udregnet i regnearket i øvelse 3.3) som en værdi for π.
b) Hvor mange led skal medtages i afsnitssummen s_n for at fejlen på π bliver mindre end 0,000001?

Øvelse 3.9

Analogt til øvelse 3.3 skal du nu lave et lille regneark til at beregne en tilnærmet værdi for pi. Denne gang skal du bruge den mere effektive formel (4), som er en differens af to uendelige rækker. Af (4) ser man nemt, at man får den n'te afsnitsfølge s_n udfra den $(n-1)$'te afsnitsfølge ved at tilføje de to sidste led:

$$s_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{16}{(2n-1) \cdot 5^{2n-1}} - (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{(2n-1) \cdot 239^{2n-1}}$$

a) Lav regnearket, så du kan se afsnitssummerne ned til den tyvende, s_{20}. Bemærk, at regnearket kun regner med et bestemt antal decimaler for eksempel 15 decimaler. Derfor kan der godt opstå afrundingsfejl på de sidste cifre.
b) Brug sætning 3.6 på hver af de uendelige rækker i (4) til at bestemme den fejl, der begås, når man benytter s_7 som en værdi for pi. Hvor mange decimaler er da korrekte?

4. Jagten på pi

Hvad får matematikere til at ville beregne π med 1000 decimaler eller endda mere, når man har rigeligt i de 8-10 decimaler, som findes på enhver lommeregner med respekt for sig selv? En af forklaringerne er vel, at menneskers handlinger ikke altid følger ”fornuften” — der kan gå sport i det! Hvem udregner først π med 1 million decimaler eller i den dur? Opgaven er ikke bare at sætte en computer til at regne på det i en eller flere dage, alt efter hvor mange decimaler, man måtte ønske. En tidobling af antallet af decimaler vil nemlig ofte resultere i et computerarbejde, som er langt over det 10-dobbelte, og man kan jo ikke have computeren til at køre i årevis. Heldigvis viser det sig, at hvis man er lidt smart, så kan man ændre på ens fremgangsmåde, herunder den anvendte algoritme eller formel til bestemmelse af π, og derved nedbringe køretiden ganske betragteligt. Nogle af de metoder, som er blevet anvendt til de seneste beregninger af pi er da også yderst raffinerede, og det er en interessant kendsgerning, at metoderne bygger på nogle formler og idéer, som blev opdaget af et indisk matematikgeni, som levede omkring år 1900. Både computernes hurtighed og de anvendte metoder har altså en stor betydning for, hvor lang tid det tager at udregne π med en given nøjagtighed. En anden ting er, at de metoder, der udvikles, kan hænde at finde anvendelse andre steder. Det er matematikken i hvert fald fuld af eksempler på. I 1989 passerede man den første milliard (10^9) decimaler af pi. Hvis de bliver skrevet ud med 10.000 decimaler på hver side – hvilket er ret tæt – vil det fylde 200 bøger á 500 sider!

I det følgende vil jeg angive en metode til at beregne pi med mange decimaler. Det skal dog nævnes, at metoden ikke er velegnet til at beregne vores vidunderlige konstant med for eksempel 1 milliard decimaler — det er den ikke effektiv nok til! Fremgangsmåden viser dog udmærket nogle af de problemer, der er. For det første opdager vi hurtigt, at lommeregneren ikke uden videre kan benyttes, idet den kun regner med ca. 10 cifre. En måde at løse dette problem på er at inddele decimalerne i *blokke* og så regne på én blok af gangen. Lad os som eksempel sige, at vi ønsker 25 decimaler af pi. Det kan gøres med 7 blokke af 5 cifre. Den første blok angiver cifrene foran kommaet og der er medtaget en ekstra blok til opsamling af afrundingsfejl. Sidstnævnte kasseres til slut. Den ønskede nøjagtighed på 25 decimaler kan opnås ved at medtage 20 led fra første delrække og 6 led fra anden delrække (anvend sætning 3.6). Vi skal altså udregne:

$$
\begin{aligned}
16\cdot\Bigg(& \frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}-\frac{1}{11\cdot 5^{11}}+\frac{1}{13\cdot 5^{13}}-\frac{1}{15\cdot 5^{15}} \\
& +\frac{1}{17\cdot 5^{17}}-\frac{1}{19\cdot 5^{19}}+\frac{1}{21\cdot 5^{21}}-\frac{1}{23\cdot 5^{23}}+\frac{1}{25\cdot 5^{25}}-\frac{1}{27\cdot 5^{27}} \\
& +\frac{1}{29\cdot 5^{29}}-\frac{1}{31\cdot 5^{31}}+\frac{1}{33\cdot 5^{33}}-\frac{1}{35\cdot 5^{35}}+\frac{1}{37\cdot 5^{37}}-\frac{1}{39\cdot 5^{39}}\Bigg) \\
-\ 4\cdot\Bigg(& \frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\frac{1}{9\cdot 239^9}-\frac{1}{11\cdot 239^{11}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

Et tal vil som sagt blive repræsenteret ved 7 blokke af 5 cifre. For eksempel vil tallet

2,621180473252938610024373627287

blive repræsenteret som

bloknummer →	1	2	3	4	5	6	7
	00002	62118	04732	52938	61002	43736	27287

Vi skal nu selv "lære" computeren at regne. Blandt andet får vi brug for at lægge to tal sammen, for eksempel:

```
   00002  62118  04732  52938  61002  43736  27287
+
   00000  80329  62897  76104  00342  14101  82535
  ------------------------------------------------
   00003  42447  67630  29042  61344  57838  09822
```

Fremgangsmåde: Start bagfra. 27287 lægges til 82535, hvorved der fås 109822, som er sekscifret. Derfor bliver resultatet 09822 med 1 i *mente*. Menten lægges til i næste blokberegning, som derfor bliver 43736 + 14101 + 1 = 57838, etc....

Øvelse 4.1

Hvilken fremgangsmåde bruger man for at trække to tal fra hinanden? Illustrer eventuelt på ovenstående to tal.

Vi får tillige brug for at dividere et tal med et "lille" tal. Med et lille tal menes et tal, som ikke behøver blive præsenteret med blokke. Beregningen kunne for eksempel være:

```
   00002  62118  04732  52938  61002  43736  27287   :  17
=  00000  15418  70866  61937  56529  55513  89840
```

Fremgangsmåde: Start fra venstre. 2 divideret med 17 er 0 med 2 til rest. Gang denne rest med 100.000 og læg næste blok til, hvorved man får 262118. Dette tal divideres med 17 og man får 15418 med 12 til rest. Denne rest ganges med 100.000 og næste blok lægges til, etc....

Øvelse 4.2

Hvilken fremgangsmåde bruges, hvis man i stedet for at dividere ovenstående tal med 17, skulle multiplicere med det?

Nu til udregningen af rækkerne på side 13: Vi starter med at udregne 16/5 og får:

1. led: 00003 20000 00000 00000 00000 00000 00000

For at bestemme 2. led, altså $16/(3 \cdot 5^3)$ kan vi bare fortsætte med at dividere 1. led med 25 og senere med 3. Når vi først dividerer med 25 får vi:

00000 12800 00000 00000 00000 00000 00000

som vi vil udnævne til 2. *hjælpeled*. Grunden er, at det kan bruges til at udregne 3. led! Hjælpeleddet divideres med 3:

2. led: 00000 04266 66666 66666 66666 66666 66666

Lad os straks trække 2. led fra 1. led, hvorved vi får et udtryk, vi kan kalde *sum1*. Hver gang et led udregnes, lægges det enten til eller trækkes fra sum1:

sum1: 00003 15733 33333 33333 33333 33333 33333

Det 3. led, altså $16/(5 \cdot 5^5)$, findes ved at dividere 2. hjælpeled med 25 (resultatet kaldet vi 3. hjælpeled) og derefter dividere resultatet med 5. På næste side kan du finde en liste over de successive opdateringer af sum1, som fremkommer hver gang et led lægges til eller trækkes fra.

Helt tilsvarende gøres for den anden uendelige række. Vi indfører igen en ny sum, *sum2*, som løbende skal opsummere leddene fra den anden række. En liste over de successive opdateringer af sum2 kan du også finde på næste side. Vi slutter af med at trække de sidste opdateringer af sum1 og sum2 fra hinanden, hvorefter vi får en tilnærmet værdi for pi:

```
  00003 15832 89575 98092 13392 07962 43108
– 00000 01673 63040 08298 89545 81528 59837
  -----------------------------------------
  00003 14159 26535 89793 23846 26433 83271
```

Idet vi kasserer den sidste blok, hvis formål var at opsamle afrundingsfejl, får vi følgende tilnærmede værdi for pi, med 25 decimalers nøjagtighed:

$\pi \approx$ 00003 14159 26535 89793 23846 26433

Successive opdateringer af sum1:

00003	20000	00000	00000	00000	00000	00000
00003	15733	33333	33333	33333	33333	33333
00003	15835	73333	33333	33333	33333	33333
00003	15832	80761	90476	19047	61904	76190
00003	15832	89864	12698	41269	84126	98412
00003	15832	89566	23607	50360	75036	07503
00003	15832	89576	31853	65745	36574	53657
00003	15832	89575	96901	12412	03241	20324
00003	15832	89575	98134	74294	38535	32088
00003	15832	89575	98090	59237	54324	79457
00003	15832	89575	98092	19020	55277	17552
00003	15832	89575	98092	13184	99938	04509
00003	15832	89575	98092	13399	74774	52509
00003	15832	89575	98092	13391	79410	21101
00003	15832	89575	98092	13392	09030	67512
00003	15832	89575	98092	13392	07922	29646
00003	15832	89575	98092	13392	07963	94463
00003	15832	89575	98092	13392	07962	37390
00003	15832	89575	98092	13392	07962	43333
00003	15832	89575	98092	13392	07962	43108

Successive opdateringer af sum2:

00000	01673	64016	73640	16736	40167	36401
00003	01673	63040	07273	01902	88022	26754
00003	01673	63040	08298	90828	65008	16216
00003	01673	63040	08298	89545	79781	85078
00003	01673	63040	08298	89545	81528	62339
00003	01673	63040	08298	89545	81528	59837

5. Afsluttende kommentarer

På side 11 lovede jeg et bevis for sætning 3.6, som vi brugte med stor succes til at vurdere fejlen ved at bortkaste alle led fra og med det $(n+1)$'te led. Her kommer det:

Bevis for sætning 3.6

For simpelheds skyld vil jeg gå ud fra, at $n=5$. Beviset for et vilkårligt n kører helt tilsvarende. Desuden vil jeg antage, at de "ulige led" er positive og de "lige led" er negative. Er det omvendte tilfældet kører argumenterne på lignende vis. Summen kan skrives på to måder:

(a) $$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \dots$$

(b) $$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + (a_6 + a_7) + (a_8 + a_9) + \dots$$

Da leddene med de ulige numre er positive og leddene med de lige numre er negative, er parenteserne i rækken (a) alle positive eller nul, hvorimod parenteserne i rækken (b) er negative eller nul. Det betyder, at hvis vi smider alle parenteserne i rækken (a) væk, så smider vi noget ikke-negativt væk, hvorfor resten må være mindre end eller lig med s. Tilsvarende med rækken (b). Vi har altså:

$$s \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$s \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

eller, hvad der er det samme:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq s \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Da forskellen på venstre og højre side er a_5, slutter vi, at forskellen på s og venstre side højst er a_5. Det ønskede er hermed vist.

□

Bemærkning 5.1

Det er helt afgørende, at den betragtede række er *konvergent*. Hvis rækken derimod ikke nærmer sig til noget tal – for eksempel går imod uendelig – så er det ikke tilladt at benytte argumenter, som ovenfor. Forsøger man alligevel fejlagtigt at argumentere på ikke- konvergente rækker, så er der eksempler på, at man kan "vise" uhyrligheder, for eksempel, at 5 er lig med 0! Forklaringen på, hvorfor man må bruge argumenter som ovenfor i forbindelse med konvergente rækker og *ikke* på *divergente* rækker, ligger i selve begrebet *konvergens*, dvs. hvad det vil sige, at noget nærmer sig til noget andet. Det ligger dog udenfor denne notes mål.

Historien om Ramanujan

Som tidligere nævnt bygger nogle af de nyeste metoder til beregning af π på formler opdaget af den indiske matematiker *Srivinasa Ramanujan* (1887 – 1920). Historien om Ramanujan er enestående. Han blev født den 22. december 1887 i en relativ fattig familie i en landsby i det sydlige Indien. Hans talent for matematik blev opdaget tidligt, men alligevel er det især hans indsats på egen hånd, der satte skub i hans udvikling. Det lykkedes ham at låne en matematikbog, der var fyldt med formler, men uden beviser for disse. Dette kom sandsynligvis til at præge Ramanujans måde at dyrke matematik på. Hans såkaldte "notesbøger" med egne opdagelser indeholder stort set ingen forklaringer på, hvordan han kom frem til sine formler. Det har i øvrigt betydet et kæmpe arbejde for matematikere at lede efter beviser for Ramanujans formler. Efterhånden blev Ramanujans specielle evner opdaget af betydningsfulde indiske matematikere, og han blev opfordret til at sende sine opdagelser til tre prominente engelske matematikere. To af dem sendte brevet tilbage uden kommentarer, hvorimod den tredje, *G. H. Hardy* fra Cambridge, svarede. Hardy betragtes nu som den førende britiske matematiker på daværende tid.

Hardy, som var vant til at få breve fra særlige, som troede at de var geniale og havde gjort store nye opdagelser, var tæt på at afvise brevet, da det ankom den 16. januar 1913: men efter aftensmaden satte Hardy og *John E. Littlewood*, en kollega til Hardy, sig ned for at pusle med nogle af formlerne i Ramanujans brev. Nogle timer senere var de kommet til en erkendelse: De så arbejdet af et geni, og ikke en galning. Hardy omtalte senere, at nogle af Ramanujans formler fuldstændigt besejrede ham: *De måtte være sande, for hvis de ikke var, ville ingen have fantasi nok til at opfinde dem*. Hardy inviterede Ramanujan til at komme til Cambridge, og de næste fem år arbejdede de to matematikere sammen i et yderst givtigt samarbejde, som resulterede i flere matematiske artikler af højeste klasse. Klimaet i England var imidlertid imod Ramanujan, og den omstædighed, at det var krig og svært for ham at holde sin vegetariske diæt gjorde, at han blev syg. I 1919 tog inderen tilbage til sit hjemland. Her døde han stærkt svækket den 26. april 1920 — en død, man nu tror skyldes vitaminmangel. Trods sine kun 37 leveår fik Ramanujan gjort sig udødelig i matematikkens historie. Ramanujan besad en næsten overnaturlig intuition for tal, og det fortælles, at han havde et forhold til *ethvert* tal! Som et eksempel herpå kan nævnes en gang, hvor Hardy besøgte Ramanujan på hospitalet. Hardy, der altid var lidt kejtet, når han skulle indlede en samtale, udbrød som noget af det første: "Jeg tror nummeret på min taxi var 1729. Det forekommer mig at være et temmelig kedeligt tal!", til hvilket Ramanujan svarede: "Nej Hardy, Nej Hardy, det er et meget interessant tal. Det er det *mindste* tal, som på to måder kan skrives som en sum af to kubiktal" ($1729 = 1^3 + 12^3$ og $1729 = 9^3 + 10^3$). Et eksempel på en af Ramanujans formler er den fantastiske formel:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390 \cdot n}{396^{4n}}$$

I 1994 benyttede *Chudnovsky* brødrene følgende Ramanujan-lignende formel til bestemmelse af 4 milliarder decimaler af pi:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+\frac{3}{2}}} \right)$$

Denne formel giver mindst 14 ekstra korrekte cifre i beregningen af pi, for hvert ekstra led, som medtages.

Iterative metoder

Med en *iteration* menes en procedure, hvor man beregner en *følge* af tal, hvor det næste tal i følgen beregnes på baggrund af det forrige. I 1976 opdagede *Eugene Salamin* og *Richard P. Brent*, uafhængigt af hinanden, en iterativ algoritme, som sjovt nok ligner en algoritme, der blev opdaget af den store tyske matematiker Carl *Friedrich Gauss* (1777 – 1855) mere end 100 år tidligere. Derfor fik algoritmen navnet *Gauss-Brent-Salamin*-algoritmen. Den *konvergerer kvadratisk* mod pi, hvormed menes, at antallet af korrekte cifre fordobles efter hvert trin i iterationen. Den ser således ud:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$

$$s_n = s_{n-1} - 2^n c_n$$

$$p_n = \frac{2a_n^2}{s_n}$$

startende med værdierne

$$a_0 = 1 \,, \; b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \; s_0 = \frac{1}{2}$$

Altså en metode, hvor man arbejder sig frem led for led for $n = 0, 1, 2, \ldots$ Det viser sig, at p_n konvergerer kvadratisk mod pi. Du kan eventuelt prøve det af på regneark, men vær opmærksom på, at allerede efter ganske få led opnås nøjagtigheden på de maksimalt ca. 15 decimaler, som regnearket kan regne med! Kan man blot lære computeren at regne med tilstrækkeligt mange decimaler, kan man få 45 millioner decimaler med bare 25 iterationer!...

En anden iterativ algoritme, der konvergerer firdobbelt, dvs. hvor der for hver iteration kommer mindst fire gange så mange korrekte cifre i pi, blev opdaget af brødrene *Borwein* i 1985. Den ser således ud:

$$y_{n+1} = \frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}}$$

$$a_{n+1} = a_n(1+y_{n+1})^4 - 2^{2k+3}y_{n+1}(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2)$$

hvor startværdierne er givet ved

$$a_0 = 6-4\sqrt{2} \ , \quad y_0 = \sqrt{2}-1$$

Da vil $1/a_n$ konvergere mod pi. For brødrene Borwein, der fandt nye iterative algoritmer af forskellige ordner, var det en stor hjælp at kigge i Ramanujans gamle "notesbøger", idet det viste sig, at de iterative algoritmer var snævert forbundet med Ramanujans såkaldte *modulære ligninger*.

Bestemme enkeltstående cifre

I 1996 kom det som noget af en sensation, da *D. Bailey*, *P. Borwein* og *S. Plouffe* kunne påvise en formel for pi, med hvilken man kan udregne en vilkårlig *hexadecimal* af pi, *uden* at udregne de tidligere hexadecimaler. Hexadecimalsystemet er 16-talsystemet! Indtil da havde man troet, at arbejdet med at bestemme en given hexadecimal var lige så stort som at udregne den pågældende hexadecimal *samt* alle de øvrige tidligere hexadecimaler. Ovennævnte personer fandt frem til følgende formel ved hjælp af et snedigt program på en computer:

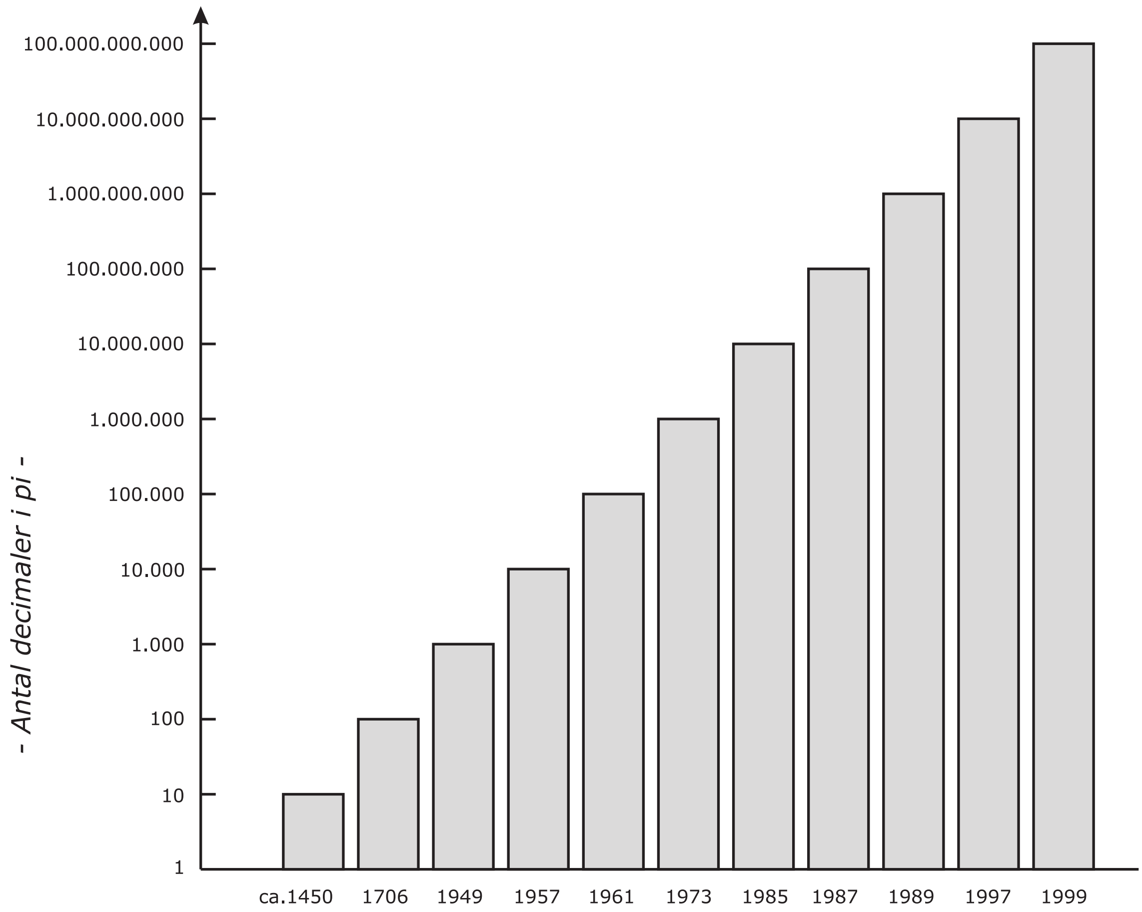
$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Jeg vil ikke komme nærmere ind på detaljer her, blot nævne, at den ikke umiddelbart kan bruges til at bestemme enkeltstående *decimaler* i pi.

Hvis du er interesseret i mere om pi, kan du konsultere nogle af de bøger og artikler, som jeg har angivet på næste side. Nogle af artiklerne kan du downloade direkte fra nettet. Endelig vil jeg slutte af med et diagram, som viser hvornår hver ny tipotens af decimaler af pi blev opnået, samt de første 10.000 decimaler af pi. God fornøjelse!

Litteratur

1. Gert Almkvist. *Att räkna ut den* 1010:*e hexadecimalen av* π *utan att räkna ut de tidligare*. Tidsskriftet Normat, 2000, siderne 49-55.
2. David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein og Simon Plouffe. *The Quest for Pi*. Mathematical Intelligencer, vol. 19, no. 1, Jan 1997, siderne 50-57. Kan også downloades fra nettet: www.nersc.gov/~dhbailey/dhbpapers
3. David Bailey, Peter Borwein and Simon Plouffe. *On the Rapid Computation of Various Polylogaritmic Constants*. Internet artikel fra 1996, som kan downloades fra: www.nersc.gov/~dhbailey/dhbpapers.
4. J. M. Borwein, P. B. Borwein. *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations tp Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi*. American Mathematical Monthly, 1989, p. 201-209.
5. Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein. *Ramanujan and Pi*. Scientific American, febr. 1988.
6. Petr Beckmann. A History of pi. St. Martin's Press, The Golem Press, 1971.
7. David Blatner. *The Joy of Pi*. Penguin Books, 1997.
8. Mogens Esrom Larsen. π *med en milliard decimaler*. Nordisk Matematisk tidsskrift nr. 3, 1990, siderne 112-114.
9. Jesper Lützen. *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling*. *Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Systime, 1985.
10. Jean-Claude Martzloff. *A History of Chinese Mathematics.* Springerverlag, 1997.
11. Simon Plouffe. *On the computation of the n'th decimal digit of various transcendental numbers*. Internet artikel fra 1996: http://www.lacim.uqam.ca/plouffe/Simon/articlepi.html
12. Torben Svendsen. *Bogen om* π. Systime, 1992.
13. Boris Sjöberg. *Historien om* π. Normat, 1998, siderne 14-25.
14. Stan Wagon. *Is* π *Normal?* Mathematical Intelligencer, 1985 no. 3, siderne 65-67.


- Antal decimaler i pi -
100.000.000.000
10.000.000.000
1.000.000.000
100.000.000
10.000.000
1.000.000
100.000
10.000
1.000
100
10
1
ca.1450
1706
1949
1957
1961
1973
1985
1987
1989
1997
1999

Pi med 10.000 decimaler

De første 5.000 decimaler:

3,

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128	4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091	4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436	7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548	0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798	6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872	1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235
4201995611	2129021960	8640344181	5981362977	4771309960	5187072113	4999999837	2978049951	0597317328	1609631859
5024459455	3469083026	4252230825	3344685035	2619311881	7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778	1857780532	1712268066	1300192787	6611195909	2164201989

3809525720	1065485863	2788659361	5338182796	8230301952	0353018529	6899577362	2599413891	2497217752	8347913151
5574857242	4541506959	5082953311	6861727855	8890750983	8175463746	4939319255	0604009277	0167113900	9848824012
8583616035	6370766010	4710181942	9555961989	4676783744	9448255379	7747268471	0404753464	6208046684	2590694912
9331367702	8989152104	7521620569	6602405803	8150193511	2533824300	3558764024	7496473263	9141992726	0426992279
6782354781	6360093417	2164121992	4586315030	2861829745	5570674983	8505494588	5869269956	9092721079	7509302955
3211653449	8720275596	0236480665	4991198818	3479775356	6369807426	5425278625	5181841757	4672890977	7727938000
8164706001	6145249192	1732172147	7235014144	1973568548	1613611573	5255213347	5741849468	4385233239	0739414333
4547762416	8625189835	6948556209	9219222184	2725502542	5688767179	0494601653	4668049886	2723279178	6085784383
8279679766	8145410095	3883786360	9506800642	2512520511	7392984896	0841284886	2694560424	1965285022	2106611863
0674427862	2039194945	0471237137	8696095636	4371917287	4677646575	7396241389	0865832645	9958133904	7802759009

9465764078	9512694683	9835259570	9825822620	5224894077	2671947826	8482601476	9909026401	3639443745	5305068203
4962524517	4939965143	1429809190	6592509372	2169646151	5709858387	4105978859	5977297549	8930161753	9284681382
6868386894	2774155991	8559252459	5395943104	9972524680	8459872736	4469584865	3836736222	6260991246	0805124388
4390451244	1365497627	8079771569	1435997700	1296160894	4169486855	5848406353	4220722258	2848864815	8456028506
0168427394	5226746767	8895252138	5225499546	6672782398	6456596116	3548862305	7745649803	5593634568	1743241125
1507606947	9451096596	0940252288	7971089314	5669136867	2287489405	6010150330	8617928680	9208747609	1782493858
9009714909	6759852613	6554978189	3129784821	6829989487	2265880485	7564014270	4775551323	7964145152	3746234364
5428584447	9526586782	1051141354	7357395231	1342716610	2135969536	2314429524	8493718711	0145765403	5902799344
0374200731	0578539062	1983874478	0847848968	3321445713	8687519435	0643021845	3191048481	0053706146	8067491927
8191197939	9520614196	6342875444	0643745123	7181921799	9839101591	9561814675	1426912397	4894090718	6494231961

5679452080	9514655022	5231603881	9301420937	6213785595	6638937787	0830390697	9207734672	2182562599	6615014215
0306803844	7734549202	6054146659	2520149744	2850732518	6660021324	3408819071	0486331734	6496514539	0579626856
1005508106	6587969981	6357473638	4052571459	1028970641	4011097120	6280439039	7595156771	5770042033	7869936007
2305587631	7635942187	3125147120	5329281918	2618612586	7321579198	4148488291	6447060957	5270695722	0917567116
7229109816	9091528017	3506712748	5832228718	3520935396	5725121083	5791513698	8209144421	0067510334	6711031412
6711136990	8658516398	3150197016	5151168517	1437657618	3515565088	4909989859	9823873455	2833163550	7647918535
8932261854	8963213293	3089857064	2046752590	7091548141	6549859461	6371802709	8199430992	4488957571	2828905923
2332609729	9712084433	5732654893	8239119325	9746366730	5836041428	1388303203	8249037589	8524374417	0291327656
1809377344	4030707469	2112019130	2033038019	7621101100	4492932151	6084244485	9637669838	9522868478	3123552658
2131449576	8572624334	4189303968	6426243410	7732269780	2807318915	4411010446	8232527162	0105265227	2111660396

6655730925	4711055785	3763466820	6531098965	2691862056	4769312570	5863566201	8558100729	3606598764	8611791045
3348850346	1136576867	5324944166	8039626579	7877185560	8455296541	2665408530	6143444318	5867697514	5661406800
7002378776	5913440171	2749470420	5622305389	9456131407	1127000407	8547332699	3908145466	4645880797	2708266830
6343285878	5698305235	8089330657	5740679545	7163775254	2021149557	6158140025	0126228594	1302164715	5097925923
0990796547	3761255176	5675135751	7829666454	7791745011	2996148903	0463994713	2962107340	4375189573	5961458901
9389713111	7904297828	5647503203	1986915140	2870808599	0480109412	1472213179	4764777262	2414254854	5403321571
8530614228	8137585043	0633217518	2979866223	7172159160	7716692547	4873898665	4949450114	6540628433	6639379003
9769265672	1463853067	3609657120	9180763832	7166416274	8888007869	2560290228	4721040317	2118608204	1900042296
6171196377	9213375751	1495950156	6049631862	9472654736	4252308177	0367515906	7350235072	8354056704	0386743513
6222247715	8915049530	9844489333	0963408780	7693259939	7805419341	4473774418	4263129860	8099888687	4132604721

De næste 5.000 decimaler:

5695162396	5864573021	6315981931	9516735381	2974167729	4786724229	2465436680	0980676928	2382806899	6400482435
4037014163	1496589794	0924323789	6907069779	4223625082	2168895738	3798623001	5937764716	5122893578	6015881617
5578297352	3344604281	5126272037	3431465319	7777416031	9906655418	7639792933	4419521541	3418994854	4473456738
3162499341	9131814809	2777710386	3877343177	2075456545	3220777092	1201905166	0962804909	2636019759	8828161332
3166636528	6193266863	3606273567	6303544776	2803504507	7723554710	5859548702	7908143562	4014517180	6246436267
9456127531	8134078330	3362542327	8394497538	2437205835	3114771199	2606381334	6776879695	9703098339	1307710987
0408591337	4641442822	7726346594	7047458784	7787201927	7152807317	6790770715	7213444730	6057007334	9243693113
8350493163	1284042512	1925651798	0694113528	0131470130	4781643788	5185290928	5452011658	3934196562	1349143415
9562586586	5570552690	4965209858	0338507224	2648293972	8584783163	0577775606	8887644624	8246857926	0395352773
4803048029	0058760758	2510474709	1643961362	6760449256	2742042083	2085661190	6254543372	1315359584	5068772460

2901618766	7952406163	4252257719	5429162991	9306455377	9914037340	4328752628	8896399587	9475729174	6426357455
2540790914	5135711136	9410911939	3251910760	2082520261	8798531887	7058429725	9167781314	9699009019	2116971737
2784768472	6860849003	3770242429	1651300500	5168323364	3503895170	2989392233	4517220138	1280696501	1784408745
1960121228	5993716231	3017114448	4640903890	6449544400	6198690754	8516026327	5052983491	8740786680	8818338510
2283345085	0486082503	9302133219	7155184306	3545500766	8282949304	1377655279	3975175461	3953984683	3936383047
4611996653	8581538420	5685338621	8672523340	2830871123	2827892125	0771262946	3229563989	8989358211	6745627010
2183564622	0134967151	8819097303	8119800497	3407239610	3685406643	1939509790	1906996395	5245300545	0580685501
9567302292	1913933918	5680344903	9820595510	0226353536	1920419947	4553859381	0234395544	9597783779	0237421617
2711172364	3435439478	2218185286	2408514006	6604433258	8856986705	4315470696	5747458550	3323233421	0730154594
0516553790	6866273337	9958511562	5784322988	2737231989	8757141595	7811196358	3300594087	3068121602	8764962867

4460477464	9159950549	7374256269	0104903778	1986835938	1465741268	0492564879	8556145372	3478673303	9046883834
3634655379	4986419270	5638729317	4872332083	7601123029	9113679386	2708943879	9362016295	1541337142	4892830722
0126901475	4668476535	7616477379	4675200490	7571555278	1965362132	3926406160	1363581559	0742202020	3187277605
2772190055	6148425551	8792530343	5139844253	2234157623	3610642506	3904975008	6562710953	5919465897	5141310348
2276930624	7435363256	9160781547	8181152843	6679570611	0861533150	4452127473	9245449454	2368288606	1340841486
3776700961	2071512491	4043027253	8607648236	3414334623	5189757664	5216413767	9690314950	1910857598	4423919862
9164219399	4907236234	6468441173	9403265918	4044378051	3338945257	4239950829	6591228508	5558215725	0310712570
1266830240	2929525220	1187267675	6220415420	5161841634	8475651699	9811614101	0029960783	8690929160	3028840026
9104140792	8862150784	2451670908	7000699282	1206604183	7180653556	7252532567	5328612910	4248776182	5829765157
9598470356	2226293486	0034158722	9805349896	5022629174	8788202734	2092222453	3985626476	6914905562	8425039127

5771028402	7998066365	8254889264	8802545661	0172967026	6407655904	2909945681	5065265305	3718294127	0336931378
5178609040	7086671149	6558343434	7693385781	7113864558	7367812301	4587687126	6034891390	9562009939	3610310291
6161528813	8437909904	2317473363	9480457593	1493140529	7634757481	1935670911	0137751721	0080315590	2485309066
9203767192	2033229094	3346768514	2214477379	3937517034	4366199104	0337511173	5471918550	4644902636	5512816228
8244625759	1633303910	7225383742	1821408835	0865739177	1509682887	4782656995	9957449066	1758344137	5223970968
3408005355	9849175417	3818839994	4697486762	6551658276	5848358845	3142775687	9002909517	0283529716	3445621296
4043523117	6006651012	4120065975	5851276178	5838292041	9748442360	8007193045	7618932349	2292796501	9875187212
7267507981	2554709589	0455635792	1221033346	6974992356	3025494780	2490114195	2123828153	0911407907	3860251522
7429958180	7247162591	6685451333	1239480494	7079119153	2673430282	4418604142	6363954800	0448002670	4962482017
9289647669	7583183271	3142517029	6923488962	7668440323	2609275249	6035799646	9256504936	8183609003	2380929345

9588970695	3653494060	3402166544	3755890045	6328822505	4525564056	4482465151	8754711962	1844396582	5337543885
6909411303	1509526179	3780029741	2076651479	3942590298	9695946995	5657612186	5619673378	6236256125	2163208628
6922210327	4889218654	3648022967	8070576561	5144632046	9279068212	0738837781	4233562823	6089632080	6822246801
2248261177	1858963814	0918390367	3672220888	3215137556	0037279839	4004152970	0287830766	7094447456	0134556417
2543709069	7939612257	1429894671	5435784687	8861444581	2314593571	9849225284	7160504922	1242470141	2147805734
5510500801	9086996033	0276347870	8108175450	1193071412	2339086639	3833952942	5786905076	4310063835	1983438934
1596131854	3475464955	6978103829	3097164651	4384070070	7360411237	3599843452	2516105070	2705623526	6012764848
3084076118	3013052793	2054274628	6540360367	4532865105	7065874882	2569815793	6789766974	2205750596	8344086973
5020141020	6723585020	0724522563	2651341055	9240190274	2162484391	4035998953	5394590944	0704691209	1409387001
2645600162	3742880210	9276457931	0657922955	2498872758	4610126483	6999892256	9596881592	0560010165	5256375678