Det skrå kast - med luftmodstand

© Erik Vestergaard

© Erik Vestergaard, 2009.

En simpel skrivefejl korrigeret december 2018. Ligeledes et par småændringer i december 2022.

Ændringer fra side 9 og frem, herunder tilføjelse af opgave med Eulers metode, 21.03.25.

Billeder:

Forside: Bearbejdet billede af ©iStock.com/nico_blue
Side 6: ©iStock.com/brett lamb
Desuden egne illustrationer.

1. Indledning

Denne note kan danne udgangspunkt for et 3g-projekt i matematik og fysik med emnet *det skrå kast med luftmodstand* eller som et oplæg til et studieretningsprojekt. Noten er udformet, så læseren selv skal udfylde detaljer gennem løsning af opgaver.

For det skrå kast *uden luftmodstand* er stedfunktionen som bekendt givet ved følgende udtryk, hvor det antages, at $x(0)=y(0)=0$ og at genstanden starter i punktet (0,0) til tiden $t=0$ samt at hastighedsvektoren har størrelsen v_0 og danner en vinkel på α i forhold til *x*-aksen:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0\cdot\cos(\alpha)\cdot t \\ y(t) &= -\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_0\cdot\sin(\alpha)\cdot t \end{aligned} \tag{1}$$

Formlerne er standard i gymnasiet og vi vil ikke udlede dem her. Når der regnes med en luftmodstand bliver situationen en del sværere og mere broget. For det første bliver der kun tale om tilnærmede modeller og så bør man endda benytte forskellige modeller i forskellige situationer. En indikator for, hvornår man bør anvende hvilken model er det såkaldte *Reynolds tal* (Reynolds number):

$$\mathrm{Re} = \frac{L\cdot\rho\cdot v}{\eta} \tag{2}$$

hvor ρ er densiteten af det medium, genstanden bevæger sig igennem, η er mediets *dynamiske viskositet* (dynamic viscosity), *v* er hastigheden af genstanden i forhold til mediet og *L* er en karakteristisk længde for objektet, for eksempel diameteren i tilfældet med en kugle.

Eksempel 1

Lad os sige, at vi har at gøre med en tennisbold, som sendes af sted med en hastighed af 35 m/s. Mediet er luft med en dynamisk viskositet på $1{,}8\cdot10^{-5}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$. Densiteten af atmosfærisk luft ved stuetemperatur er 1,204 kg/m^3. En tennisbold har en diameter omkring 6,5 cm. Dermed fås den dimensionsløse størrelse:

$$\mathrm{Re} = \frac{L\cdot\rho\cdot v}{\eta} = \frac{0{,}065\,\mathrm{m}\cdot1{,}204\,\mathrm{kg/m^3}\cdot35\,\mathrm{m/s}}{1{,}8\cdot10^{-5}\,\mathrm{N\cdot s/m^2}} = 152200 \tag{3}$$

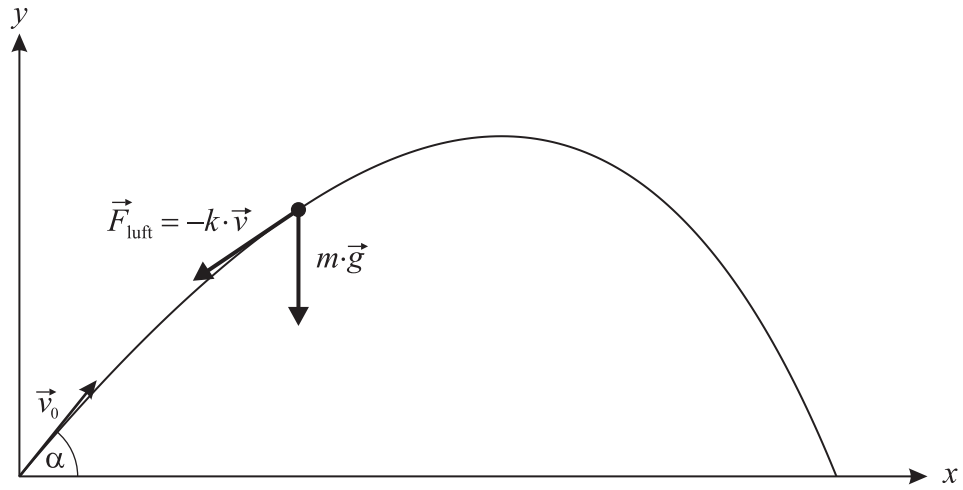
□

Erfaringer har vist, at hvis $\mathrm{Re}<1$, så er det en god model at antage at luftmodstanden er *proportional med hastigheden*. Hvis derimod $1000<\mathrm{Re}<300000$, så er det en bedre model at antage at luftmodstanden er modsat rettet hastigheden og proportional med *kvadratet på farten*. For Reynoldstal imellem 1 og 1000 er situationen en mellemting. Hvis Reynoldstallet er lille, så er flowet rundt om genstanden *laminær* (laminar), hvilket betyder, at der ikke dannes hvirvler. Hvis derimod Reynoldstallet er stort, så er flowet *turbulent*. Hvis Reynoldstallet skal være mindre end 1, så skal genstanden enten befinde sig i en væske med ret stor viskositet eller også skal genstanden være yderst lille og ikke

have for stor hastighed. Dette vil sjældent være tilfældet for bevægelse i atmosfærisk luft. Alligevel vil vi starte med at betragte dette tilfælde, da problemet forholdsvist nemt lader sig løse matematisk. Læseren opfordres til at løse opgaverne undervejs. Der forudsættes kendskab til den indledende teori for differentialligninger af første orden.

2. Hastighedsproportional luftmodstand - model 1

I dette afsnit skal vi undersøge tilfældet hvor luftmodstanden er proportional med hastighedsvektoren. Nærmere bestemt er luftmodstanden en kraftvektor, som er modsat rettet bevægelsen, altså modsat rettet hastighedsvektoren $\vec{v}$, og størrelsen er proportional med genstandens fart *v*.



Opgave 2

Benyt fysiske argumenter, herunder Newtons 2. lov, til at argumentere for at genstanden skal tilfredsstille følgende differentialligning:

(4) $$m \cdot \vec{v}' = m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{v}$$

eller skrevet ud i koordinater $\vec{v} = (v_x, v_y)$:

(5a) $$(v_x)' = -\frac{k}{m} \cdot v_x$$

(5b) $$(v_y)' = -\frac{k}{m} \cdot v_y - g$$

Vis desuden, at hvis genstanden til tiden $t = 0$ befinder sig i (0,0) og hastighedsvektoren til samme tidspunkt danner vinklen α med *x*-aksen, så har vi følgende *randbetingelser*, hvor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ er genstandens stedvektor:

(6) $$x(0) = y(0) = 0$$

(7) $$v_x(0) = v_0 \cdot \cos(\alpha), \quad v_y(0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

Opgave 3

I denne opgave vil du blive ledt frem til en løsning til det differentialligningssystem, der blev opstillet i opgave 2.

a) Bemærk først, at differentialligningerne (5a) og (5b) begge er af velkendte standardtyper! Benyt din viden om løsningerne til disse typer til at vise, at løsningerne til (5a) og (5b) er på følgende form, hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter:

$$\begin{aligned} v_x &= c_1 \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} \\ v_y &= c_2 \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m\cdot g}{k} \end{aligned}$$

b) Benyt randbetingelserne (6) til at finde de arbitrære konstanter. Vis at

$$(8) \qquad \begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} \\ v_y &= \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m\cdot g}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m\cdot g}{k} \end{aligned}$$

c) Nu har du bestemt hastighedskoordinaterne. For at bestemme stedkoordinaterne skal du integrere. Vis, at stedkoordinaterne er på følgende form, hvor c_3 og c_4 er arbitrære konstanter:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{m}{k} \cdot v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} + c_3 \\ y(t) &= -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m\cdot g}{k} \right) \cdot \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t} - \frac{m\cdot g}{k} \cdot t + c_4 \end{aligned}$$

d) Benyt randbetingelserne (6) til at vise at:

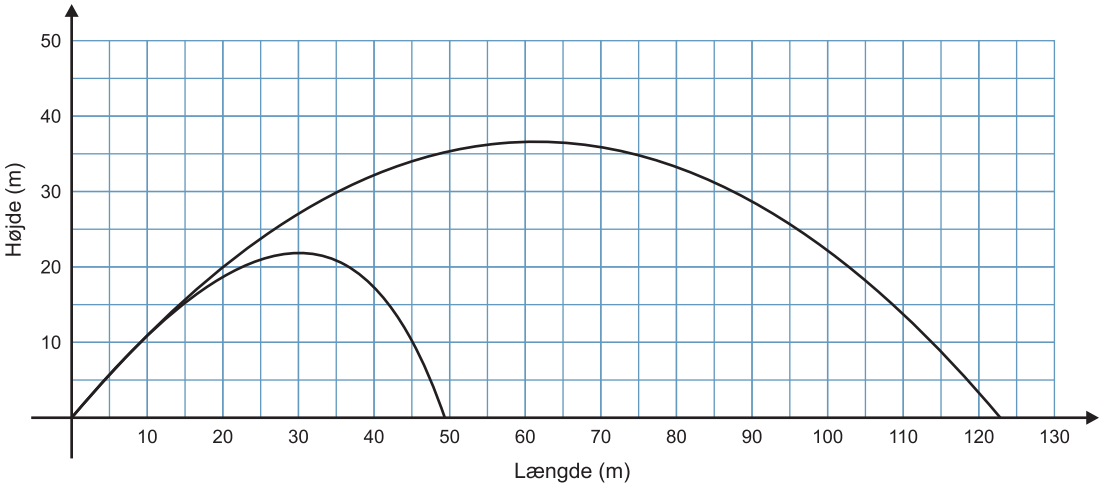
$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{m}{k} \cdot v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ c_4 &= \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m\cdot g}{k} \right) \end{aligned}$$

e) Indsæt værdierne for de arbitrære konstanter fra d) og omskriv stedkoordinaterne fra c) til følgende udtryk:

$$(9) \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m v_0 \cos(\alpha)}{k} \left(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t}\right) \\ \dfrac{m}{k} \left(v_0 \sin(\alpha) + \dfrac{mg}{k} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-(k/m)\cdot t}\right) - \dfrac{mg}{k} \cdot t \end{pmatrix}$$

Med resultatet i (9) har vi løst bevægelsesproblemet. På næste side er afbildet banekurven for en tennisbold med masse $m = 0{,}0575\ \mathrm{kg}$, begyndelsesfart $v_0 = 35\ \mathrm{m/s}$ og startvinkel $\alpha = 50°$. Luftmodstandsparameteren er $k = 0{,}0165\ \mathrm{N/(m/s)}$ og $g = 9{,}82\ \mathrm{m/s^2}$. Banekurven er sammenlignet med den, man ville få, hvis der ikke var nogen luftmodstand. Som nævnt er denne model ikke optimal i den givne situation, da Reynoldstallet

er for stort. Vi skal dog senere se, at kurven ikke er så langt fra den kurve man ville få ved at benytte den mere korrekte model, som vi skal se på i næste afsnit.



3. Hastighedskvadratisk luftmodstand - model 2

Ifølge afsnit 1 er det for langt de fleste kast i atmosfærisk luft mere nøjagtigt at benytte model 2, hvor luftmodstanden antages modsat rettet bevægelsen og i størrelse er proportional med *kvadratet på farten*.

Opgave 4

Argumenter for, at vi i model 2 for det skrå kast skal løse følgende differentialligning, hvor D er en konstant:

(10) $$m\cdot\vec{v}' \;=\; m\cdot\vec{g} - D\cdot|\vec{v}|\cdot\vec{v}$$

og skrevet ud i koordinater:

(11) $$\begin{aligned} m\cdot v_x' &= -D\cdot\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)\cdot v_x \\ m\cdot v_y' &= -m\cdot g - D\cdot\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)\cdot v_y \end{aligned}$$

□

Det viser sig, at den samlede modstandskoefficient D afhænger af mediets densitet ρ, tværsnitsarealet A vinkelret på genstandens bevægelse samt genstandens form og overfladefriktion. De to sidstnævnte er indeholdt i den såkaldte *Drag Coefficient*, C_d. Man har fundet følgende udtryk for den samlede modstandskoefficient D:

(12) $$D \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot C_d\cdot A$$

Eksempel 5

Lad os bestemme den samlede modstandskoefficient for en tennisbold, som bevæger sig i atmosfærisk luft ved en temperatur på 20°C. En tennisbold har typisk en diameter på 6,5 cm. Dermed kan vi bestemme det areal, som vender op mod bevægelsesretningen:

$A = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(0{,}065\,\mathrm{m})^2 = 0{,}003318\,\mathrm{m}^2$. Luftens massefylde ved 20°C er på 1,204 kg/m^3. Drag koefficienten for en tennisbold er typisk 0,5-0,6. Vi sætter den til 0,51. Det giver følgende værdi for tennisboldens samlede modstandskoefficient:

$$D \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot C_{\mathrm{d}}\cdot A \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot 1{,}204\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}51\cdot 0{,}0\,\mathrm{m^2} \;=\; 0{,}001019\,\mathrm{kg/m}$$

□

Differentialligningssystemet (11) er desværre ikke af en simpel natur. For det første er systemet *koblet*, hvormed menes at de to ukendte funktioner, v_x og v_y, som vi ønsker at bestemme, figurerer i begge ligninger. Man kan dermed ikke løse ligningerne hver for sig, undtagen i specialtilfælde. Desuden er differentialligningssystemet ikke *lineært*, hvilket betyder at den omfattende teori, man kender omhandlede lineære differentialligninger, ikke kan anvendes. Ovenstående betyder, at vi ikke kan finde løsninger i form af færdige funktionsudtryk. Vi må nøjes med at bestemme tilnærmede funktionsværdier for løsningerne i en række punkter ved hjælp af såkaldte *numeriske metoder*. Før vi gør det, skal vi dog i opgave 6 se på et specieltilfælde, hvor det lader sig gøre at bestemme en løsnings på funktionsform. Opgaven er ikke helt nem og kræver kendskab til den løsningsmetode, som går under navnet *separation-af-variable-metoden*.

Opgave 6 (Lodret fald med luftmodstand)

I tilfældet med et lodret fald bliver problemet 1-dimensionalt. Vi kan nøjes med at regne med en *y*-koordinat, som afhænger at tiden *t*.

a) Lav en tegning af situationen, hvor du tegner kraftpile på genstanden. Argumenter for at vi skal løse følgende differentialligning:

(13) $$m\cdot v' \;=\; -m\cdot g \;+\; D\cdot v^2$$

b) Indfør for overskuelighedens skyld en størrelse *k* givet ved $k = \sqrt{m\cdot g/D}$ og vis, at ligningen (13) kan omskrives til:

(14) $$v' \;=\; \frac{D}{m}\cdot(v^2 - k^2)$$

Konstater ved separation af variable, at vi skal løse følgende ligning:

(15) $$\int\left(\frac{1}{v^2 \;-\; k^2}\right)\cdot dv \;=\; \int\frac{D}{m}\cdot dt$$

c) For at kunne bestemme integralet på venstre side i (15) er det en stor fordel at *dekomponere* integranden i *partialbrøker* (Partial-Fraction Decomposition) før man foretager integrationen. Vis at

(16) $$\frac{1}{v^2 - k^2} \;=\; \frac{\frac{1}{2k}}{v-k} \;-\; \frac{\frac{1}{2k}}{v+k}$$

d) Vis at integrationen af (15) fører til følgende ligning:

(17) $$\ln|v-k| - \ln|v+k| \;=\; 2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t \;+\; c \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left|\frac{v-k}{v+k}\right| \;=\; 2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t \;+\; c$$

hvor *c* er en arbitrær konstant.

e) Lad os vedtage, at genstanden slippes til tidspunktet $t=0$. Vis at i dette tilfælde skal hastighedsløsningen v (til 17) opfylde:

(18) $$-\frac{v-k}{v+k} = \mathrm{e}^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

NB! Husk at du kun betragter den løsning, som går igennem punktet $(t,v)=(0,0)$.

f) Isoler v i (18) og vis at man får følgende:

(19) $$v = k\cdot\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{1+\mathrm{e}^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right) = -k\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}-\mathrm{e}^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{\mathrm{e}^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}+\mathrm{e}^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right) = -\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}}{\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t}}\right)$$

Eller hvis man foretrækker de hyperbolske funktioner:

(20) $$v(t) = -\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}\cdot\tanh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)$$

Ved integration af (20) for at finde stedfunktionen $y(t)$ kan man vise, at man får følgende endelige løsning til problemet:

(21) $$y(t) = -\frac{m}{D}\cdot\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right) + y_0$$

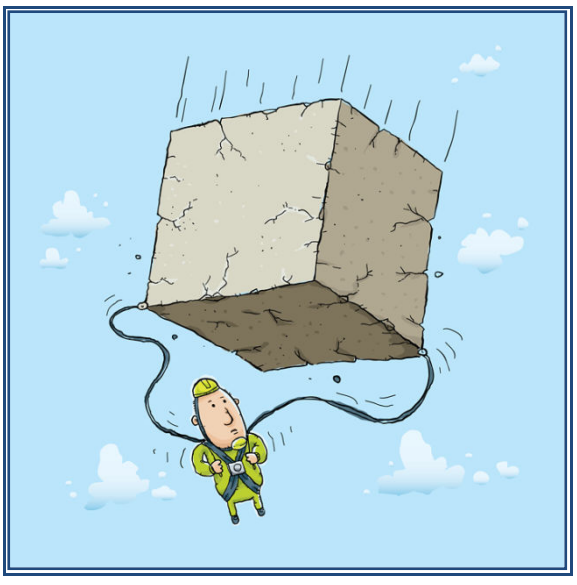
Lad os se på et par konsekvenser af ovenstående løsninger.

g) Vis ved hjælp af den sidste ligning i (19), at man har følgende grænseværdi:

(22) $$v(t) \to \sqrt{\frac{m\cdot g}{D}} \quad \text{for} \quad t\to\infty$$

Overvej hvad (22) betyder fysisk set. Vil det samme ske for alle typer genstande?

□



Den sidste del af noten er ret avanceret. Som tidligere nævnt må man ty til *numeriske metoder*, når man skal bestemme løsninger til den generelle differentialligning (11). For at kunne gøre det, skal vi omskrive differentialligningssystemet lidt, så det bliver af 1. orden! Det kan gøres ved et lille trick ved at indføre to nye koordinater, som er lig med henholdsvis hastigheden i x-aksens retning $x_2(t) = x'(t)$ og hastigheden i y-aksens retning $x_4(t) = y'(t)$.

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x(t) \\
x_2(t) &= x'(t) = v_x(t) \\
x_3(t) &= y(t) \\
x_4(t) &= y'(t) = v_y(t)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Opgave 7 (Differentialligningssystem for model 2)

Vis at differentialligningssystemet (11) giver anledning til følgende system af differentialligninger af 1. orden, med ovenstående for øje:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2 + x_4^2}\right)\cdot x_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_4 \\
\frac{dx_4}{dt} &= -g - \frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2 + x_4^2}\right)\cdot x_4
\end{aligned}
\tag{24}
$$

med begyndelsesbetingelserne:

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= 0 \\
x_2(0) &= v_0\cdot\cos(\alpha) \\
x_3(0) &= y_0 \\
x_4(0) &= v_0\cdot\sin(\alpha)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

idet vi ønsker at bevægelsen starter i $(0, y_0)$: $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ og at hastigheden til tiden 0 er givet ved: $(x'(0), y'(0)) = (v_0\cdot\cos(\alpha), v_0\cdot\sin(\alpha))$.

□

Opgave 8 (Løse model 2 numerisk med Eulers metode)

Som sagt er man nødsaget til at benytte numeriske metoder, når en løsning til differentialligningssystemet (24) for model 2 skal bestemmes. Den simpleste af alle metoder er *Eulers metode* af 1. orden. Du kan se metoden beskrevet her:

https://matematiksider.dk/projekter/eulers_metode.pdf

a) Vis at differentialligningssystemet (24) med begyndelsesbetingelserne (25) kan løses numerisk med Eulers metode med skridtlængde h ved at udregne fire talfølger $\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, \{x_{3,n}\}$ og $\{x_{4,n}\}$, hvor følgernes elementer er givet rekursivt ved:

$$
\begin{aligned}
x_{1,n+1} &= x_{1,n} + h \cdot x_{2,n} \\
x_{2,n+1} &= x_{2,n} + h \cdot \left[-\frac{D}{m} \cdot \left(\sqrt{x_{2,n}^2 + x_{4,n}^2} \right) \cdot x_{2,n} \right] \\
x_{3,n+1} &= x_{3,n} + h \cdot x_{4,n} \\
x_{4,n+1} &= x_{4,n} + h \cdot \left[-g - \frac{D}{m} \cdot \left(\sqrt{x_{2,n}^2 + x_{4,n}^2} \right) \cdot x_{4,n} \right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

med begyndelsesbetingelser:

$$
\begin{aligned}
x_{1,0} &= 0 \\
x_{2,0} &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \\
x_{3,0} &= y_0 \\
x_{4,0} &= v_0 \cdot \sin(\alpha)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

b) Regnearket Excel er velegnet til at udføre de numeriske beregninger. Det er hensigtsmæssigt at anbringe nogle faste størrelser, som ikke skal nedkopieres, øverst i regnearket, for eksempel alle værdierne i felterne farvet med blåt. Dermed kan man senere hurtigt eksperimentere med at ændre disse værdier for at se, hvilken effekt, det har på den endelige banekurve. På rækken ud for $t = 0$ bruger man blandt andet (27) til at skrive de relevante Excel-formler. Bemærk at det udover x_1, x_2, x_3 og x_4 er smart også løbende at udregne fartværdierne $\sqrt{x_2^2 + x_4^2}$. For at skrive formlerne i rækken under $t = 0$ (her $t = 0{,}02$), bruges de rekursive formler i (26). Herefter nedkopieres cellerne fra denne række og nedefter. Til slut markeres kolonnerne med x og y, hvorefter menuen *Indsæt* > *Punktdiagram* (X,Y) vælges for at få vist en banekurve for det skrå kast med luftmodstand. Detaljerne overlades til læseren.

Faste størrelser					
Modstandskoefficient		D	0,0033	kg/m	
Masse		m	0,052	kg	
Tyngdeacceleration		g	9,82	m/s^2	
Startpunkt: x		$x(0)$	0	m	
Startpunkt: y		$y(0)$	2	m	
Startfart		v_0	20	m/s2	
Startvinkel		α	42	grader	
Step i tid		h	0,02	s	
	x_1	x_3	x_2	x_4	
t (sek)	x (m)	y (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)	Fart (m/s)
0,00	0,0	2,0	14,9	13,4	20,0
0,02	0,3	2,3	14,5	12,8	19,4
0,04	0,6	2,5	14,1	12,3	18,8
0,06	0,9	2,8	13,8	11,8	18,2

Opgave 9 (Løse model 2 med Heuns metode)

En anden metode til numerisk løsning af differentialligninger går under navnet *Heuns metode* (modificeret Euler). Prøv selv at søge efter denne metode på for eksempel Wikipedia. Forsøg at implementere metoden på en måde analogt til den måde Eulers metode blev implementeret på i opgave 8. Heuns metode er en såkaldt 2. ordens metode og vil normalt være mere præcis end Eulers metode for den samme skridtlængde h.

Opgave 10 (Løse model 2 med CAS værktøj)

Hvis du har rådighed over et avanceret CAS-værktøj såsom *Maple*, kan du forsøge at løse differentialligningssystemet ved hjælp at den såkaldte *klassiske 4. ordens Runge Kutta metode*. Det er en af de bedste metoder at anvende.

□

Differentialligningssystemet i (24) og (25) er et eksempel på et system, som vi lidt mere generelt og abstrakt kan skrive på følgende "vektorform":

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(t,\vec{X})\,; \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 \tag{28}$$

hvor $\vec{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ og hvor $\vec{F}(t,\vec{X}) = (f_1(t,\vec{X}), f_2(t,\vec{X}), \ldots, f_n(t,\vec{X}))$ for givne funktioner $f_i(t,\vec{X}), i = 1,2,\ldots,n$. I dette tilfælde har vi altså:

$$\vec{F}(t,\vec{X}) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \\ f_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4) \end{pmatrix} \tag{29}$$

hvor

$$\begin{aligned} f_1(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2 \\ f_2(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= -\frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_2 \\ f_3(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_4 \\ f_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4) &= -g - \frac{D}{m}\cdot\left(\sqrt{x_2^2+x_4^2}\right)\cdot x_4 \end{aligned} \tag{30}$$

I dette tilfælde har vi at gøre med et *autonomt* system, da t ikke figurerer på højre side!

Opgave 11 (Svær – Microsoft Excel til løsning af model 2)

Hvis du ikke har et CAS-værktøj til rådighed, og du er hård til at programmere, så kan du selv lave et lille Excel VBA-program, hvor du implementerer den *klassiske 4. ordens Runge Kutta metode* til løsning af differentialligningssystemet. På "vektorform" lyder metoden således: Antag at et datapunkt $(t_k, \vec{X}_k)$ er kendt. Det næste punkt ved skridt på h i tid fås på følgende måde:

$$
\begin{aligned}
\vec{K}_1 &= \vec{F}(t_k, \vec{X}_k) \\
\vec{K}_2 &= \vec{F}(t_k + \tfrac{1}{2}h, \vec{X}_k + \tfrac{1}{2}h \cdot \vec{K}_1) \\
\vec{K}_3 &= \vec{F}(t_k + \tfrac{1}{2}h, \vec{X}_k + \tfrac{1}{2}h \cdot \vec{K}_2) \\
\vec{K}_4 &= \vec{F}(t_k + h, \vec{X}_k + h \cdot \vec{K}_3) \\
\vec{K} &= \frac{\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4}{6}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Næste punkt: $(t_{k+1}, \vec{X}_{k+1}) = (t_k + h; \vec{X}_k + h \cdot \vec{K})$.

Forslag til yderligere undersøgelser

- Undersøg *kastelængden* og *kastehøjden*, når der er luftmodstand.
- Undersøg, hvor man skal sigte, hvis man skal ramme en genstand i en given position. Man må nødvendigvis sigte højere … Du kan eventuelt nøjes med at kigge på tilfældet uden luftmodstand her.
- Undersøge hvilken *elevation* (startvinkel), som giver anledning til den største kastelængde – hvor startfarten v_0 er holdt fast på en værdi.