Pythagoras' sætning

I denne note skal vi give tre forskellige beviser for Pythagoras' sætning:

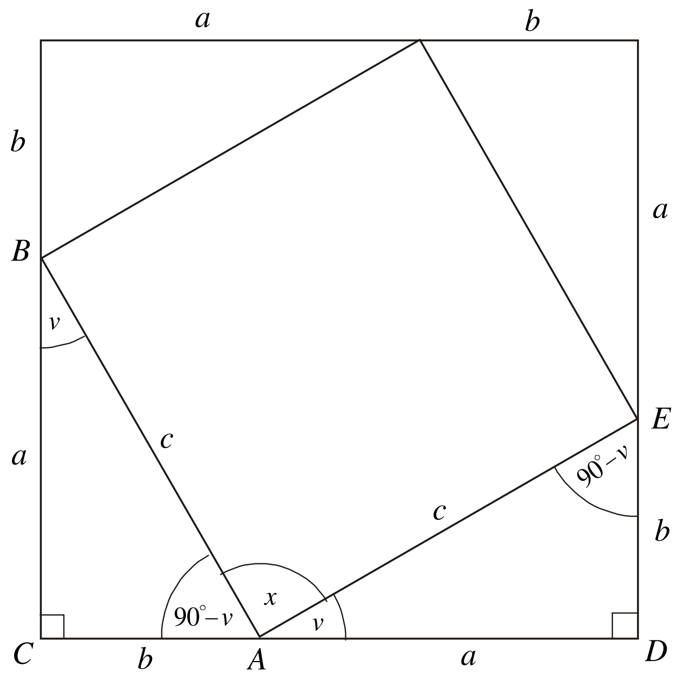
Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant ABC, hvor den rette vinkel betegnes med C, gælder:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis 1

Lad os tegne et stort kvadrat med sidelængden $a+b$. Fire kopier af trekanten omtalt i sætningen anbringes nu i hvert hjørne af kvadratet, som angivet på figuren. I midten bliver herved dannet en lille firkant, hvor alle siderne har længden c.



For at vise, at den lille firkant er et *kvadrat* mangler vi at vise, at dens vinkler alle er rette. Sæt $\angle CBA = v$. Da vinkelsummen i en trekant er $180°$ fås $\angle CAB = 90° - v$. Da ΔADE og ΔABC er kongruente, fås $\angle DAE = v$ og $\angle DEA = 90° - v$. Eftersom $\angle CAD = 180°$ fås $x = 180° - v - (90° - v) = 180° - v - 90° + v = 90°$. Tilsvarende fås at alle de andre vinkler i firkanten er rette.

Arealet af hver af de fire trekanter er $\frac{1}{2} \cdot h \cdot G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$. Da det store kvadrats areal er lig med summen af de fire trekanters areal og det lille kvadrats areal, så fås:

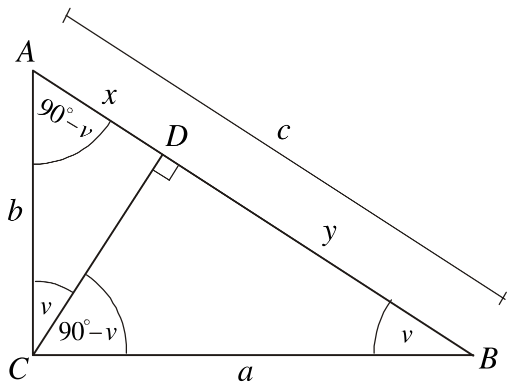
$$(a+b)^2 = 4 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b) + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

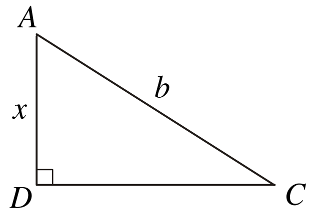
som beviser det ønskede.

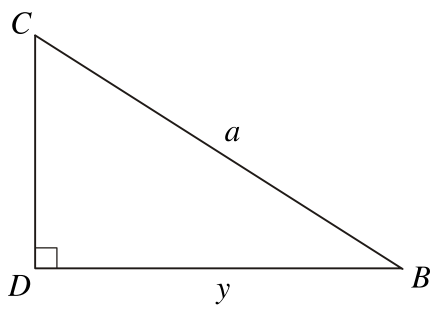
□

Bevis 2

Tegn højden fra den rette vinkel C ned på siden c og kald fodpunktet for D. Sæt $|AD| = x$ og $|DB| = y$. Sæt endvidere $\angle CBD = v$. På grund af vinkelsummen i en trekant fås derefter de øvrige vinklers størrelser, som angivet på figuren nedenfor. Dette viser, at trekanterne ΔABC , ΔACD og ΔBCD alle er *ensvinklede*. Vi drejer og spejler de to små trekanter og tegner dem under den store:







Da trekanterne er ensvinklede må ensliggende sider derfor have samme forhold. Specielt får vi:

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b^2}{c}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{a^2}{c}$$

Heraf fås $c = x + y = \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = \frac{b^2 + a^2}{c} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$.

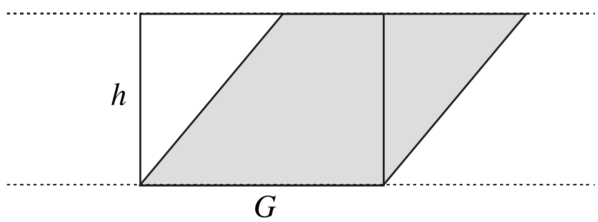
□

Bevis 3

Før vi begynder med det egentlige bevis vil vi lige formulere en hjælpesætning:

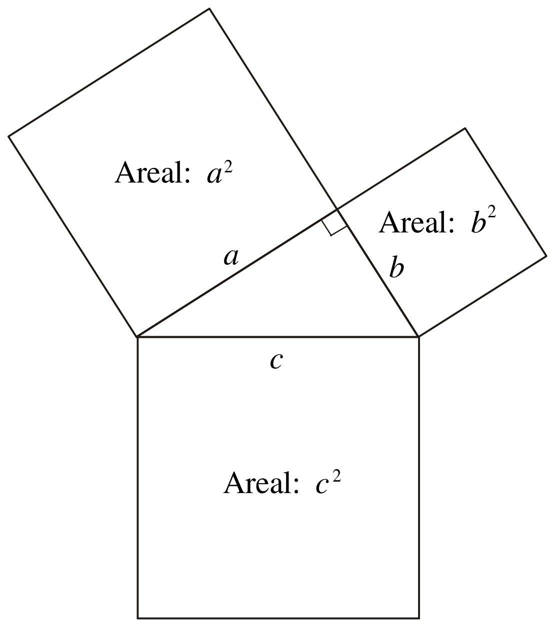
Hjælpesætning

Hvis man *skævvrider* et rektangel som på figuren, så ændres figurens areal ikke.



Bevis for hjælpesætning: Da et parallelograms areal er lig med højde gange grundlinje og disse størrelser ikke ændrer sig ved skævvridningen, så er arealet bevaret. NB! Man kan også argumentere med, at parallelogrammet har ”mistet en trekant” , men ”modtaget en lige så stor trekant”, så arealet er uændret!

Nu til det egentlige bevis: Vi kan omformulere Pythagoras’ sætning til en sætning om arealer: Hvis vi tegner kvadrater ud fra hver af siderne i trekanterne ligesom på figuren på næste side, så svarer Pythagoras’ sætning til den påstand, at arealerne af de to små kvadrater er lig med arealet af det store kvadrat.



For at bevise udsagnet om kvadraternes arealer skal vi gennem en tegneserie vise, hvordan de to kvadrater uden at ændre areal kan deformeres til to rektangler og hvorledes disse rektangler ved en flytning kan bringes til præcist at dække det store kvadrat. På figur 1 i tegneserien på næste side ser vi, at kvadratet hørende til siden a kan deformeres over i det markerede parallelogram, hvor siden BE er vinkelret på AB. Ifølge hjælpesætningen er det sket uden at figuren har ændret areal.

På figur 2 vises hvordan kvadratet hørende til siden b på tilsvarende måde kan "skævvrides" over i det med mørk farve markerede parallelogram, igen uden at arealet ændres.

På figur 3 omdannes de to parallelogrammer fra figur 2 til rektangler, igen ved en skævvridning, som nævnt i hjælpesætningen. Arealet er igen bevaret.

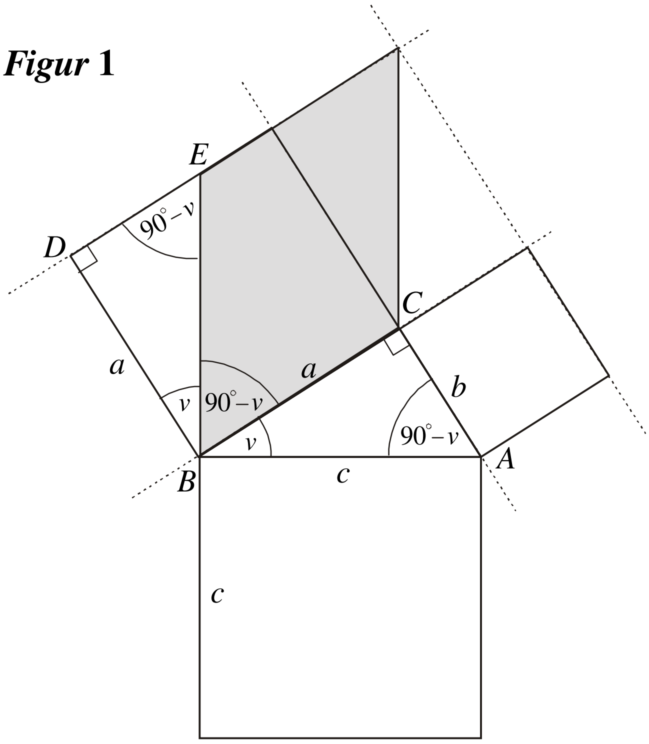
På figur 4 parallelforskydes de to rektangler ned i det store kvadrat. Tilbage er blot at redegøre for, at rektanglerne netop passer ned i kvadratet. Det er tilstrækkeligt at argumentere for, at *højden* af de to rektangler fra figur 3 er lig med c. Jeg vil nøjes med at gøre det for det venstre rektangel – forklaringen for det højre rektangel foregår på analog vis. Højden af venstre rektangel er lig med $|BE|$. Dette fremgår af måden, hvorpå figuren er skævvredet på. At $|BE| = c$ får man ved at vise, at ΔABC og ΔBDE er *kongruente*. Er de det, vil specielt hypotenuserne nemlig være lige store, dvs. $|BE| = c$.

At trekanterne er kongruente får man ved at kigge på figur 1 igen: Sæt $\angle ABC = v$ og argumentér som tidligere for, at de øvrige vinkler er som angivet på figuren. Det viser, at de to trekanter er ensvinklede. At forstørrelsesfaktoren er lig med 1 fremgår af, at siden overfor vinklen $90° - v$ i begge tilfælde er lig med a. Dette afslutter vores bevis!

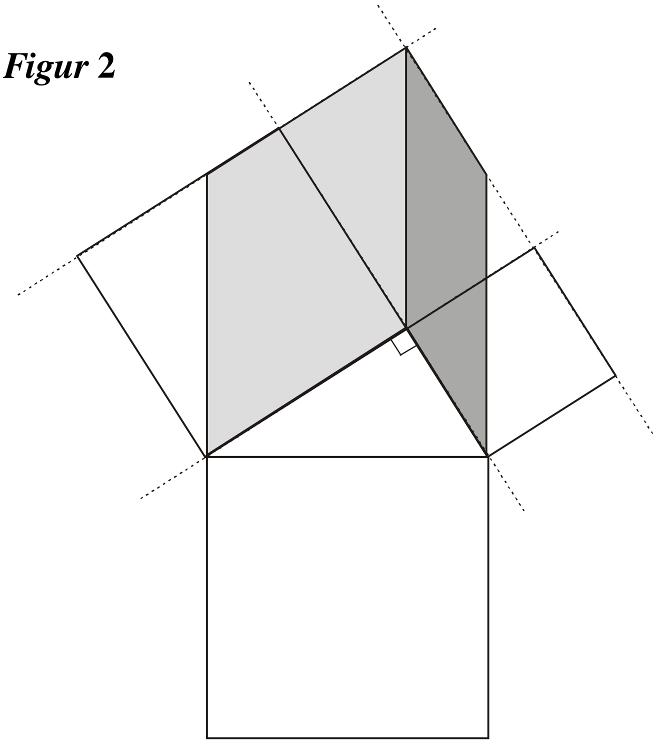
□

Animation

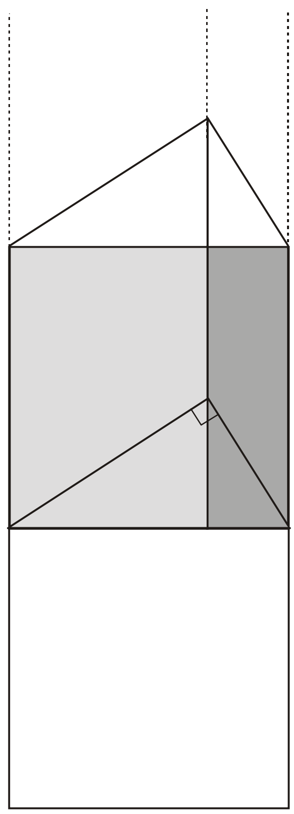
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4