Løsninger til udvalgte øvelser i noten *Prosthaphaeresis*

Øvelse 2.1

a) På forsiden af *Astronomia Danica* aflæses romertallene til 1640. Der er tale om en senere udgave af bogen, da den første blev udgivet i 1622.

b) Overlades til læseren.

c)

$$\begin{aligned}\sin(A)\cdot\sin(B) &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(90°-(A-B))-\sin(90°-(A+B))\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sin((90°-A)+B))-\sin((90°-A)-B))\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(A'+B))-\sin(A'-B))\right]\end{aligned}$$

d) $|BC| = |AB|\cdot\sin(24°) = 351\cdot\sin(24°) = 142,7646$.

e) Vi flytter kommaet i 351 tre pladser mod venstre, så vi får et tal imellem –1 og 1, dvs. vi omskriver til: $|BC| = \sin(24°)\cdot 351 = \sin(24°)\cdot 0,351\cdot 10^3$. For at multiplicere $\sin(24°)$ med 0,351 bruger vi idéen fra notens eksempel 1.1. Situationen er dog lidt nemmere her, da det ene tal i produktet i forvejen er et udtryk i sinus. Derfor behøver vi blot at bestemme en vinkel *v*, så $\sin(v) = 0,351$. Ved at gå omvendt ind i en sinustabel fra Erlang C fås $v = 20,55°$. Vi mangler altså at udregne $\sin(24°)\cdot\sin(20,55°)$ og vil hertil benytte notens formel (4). Komplementet til den første vinkel på $24°$ er $66°$. Ifølge formel (4) får vi derfor:

$$\begin{aligned}\sin(24°)\cdot\sin(20,55°) &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(66°+20,55°)-\sin(66°-20,55°)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(86,55°)-\sin(45,45°)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(86,55°)-\sin(45,45°)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left[0,9982-0,7126\right]\end{aligned}$$

Hermed fås: $|BC| = 0,1428\cdot 10^3 = 142,8$.

f) $20°33' = (20+\frac{33}{60})° = 20,55°$.

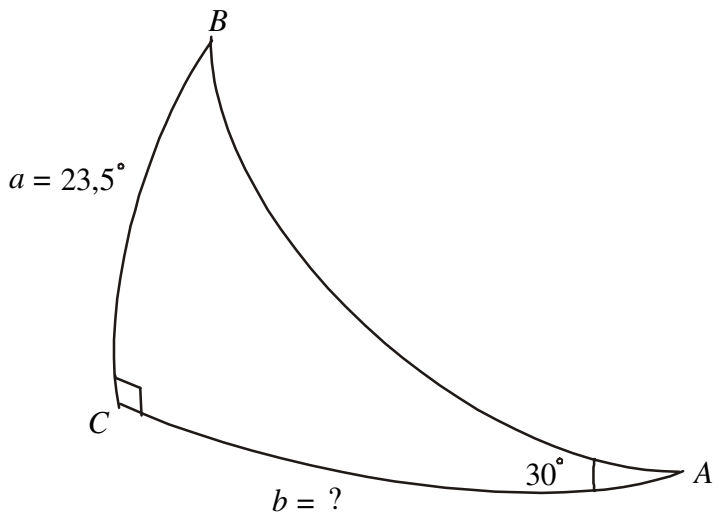
g) S.R. 4067366 i Longomontanus bog svarer til $\sin(24°)$. Dette tal benytter han iøvrigt ikke til noget! Longomontanus udregner desuden komplementet til $24°$ og får $66°$. Herefter udregner han sum (*aggregatum*) og differens (*differentia*) mellem dette komplement (*Complementum*) og vinklen $20°33' = 20,55°$. Sinus (S.R.) til disse to vinkler bestemmes og der divideres med 2 (*Dimidium*). Metoden følger altså nøje den vi anvendte i spørgsmål e). Vinklen $20°33'$ er iøvrigt den inverse sinus til 0,351.

h) Longomontanus bestemmer $|BC|$ med en nøjagtighed på 4-5 betydende cifre. Grunden til, at han ikke får en nøjagtighed på 7 betydende cifre er, at der i bestemmelsen af $\sin^{-1}(0,351)$ kun kan opnås en nøjagtighed på 1 bueminut!

Øvelse 3.1

a) Overlades til læseren.
b) Logaritmerne kan udover til multiplikationer også bruges i forbindelse med divisioner og potensopløftning. Dette kan de prosthaphaeresiske regler ikke! Desuden er logaritmernes produktregel simplere end den prosthaphaeresiske regel (4) fra noten. Man undgår blandt andet at dividere med 2.

Eksemplet side 11 i Astronomia Danica



På side 11 i *Astronomia Danica* regner Longomontanus på en *sfærisk trekant*. Der gælder følgende relation i en sfærisk trekant:

(1) $$\sin(b) = \frac{\tan(a)}{\tan(A)} = \tan(a) \cdot \tan(90° - A)$$

Det er reelt denne formel, som Longomontanus bruger. Han var i besiddelse af en t*angenstabel*. Ved brug af en sådan tabel fås:

$$\tan(23,5°) \cdot \tan(90° - 30°) \;=\; 0,4348124 \;\cdot\; 1,7320508$$

Ifølge formlen ovenfor skal disse to tal multipliceres. Da det ene tal er numerisk større end 1, så må man først foretage en lille omskrivning, før man kan anvende *Prosthaphaeresis:*

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad 0,4348124 \cdot 1,7320508 &= 0,4348124 \cdot (1+0,7320508) \\
&= 0,4348124 + 0,4348124 \cdot 0,7320508
\end{aligned}
$$

Man bestemmer nu x og y, således at

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= 0,4348124 \\
\sin(y) &= 0,7320508
\end{aligned}
$$

Ved at gå omvendt ind i en *sinustabel* to gange fås: $x = 47°4'$ og $y = 25°46'$. Komplementet $x' = 90° - 47°4' = 42°56'$ udregnes. Herefter anvendes følgende prosthaphaeresiske regel:

$$
(3) \qquad \sin(x) \cdot \sin(y) = \cos(x') \cdot \sin(y) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\sin(x'+y) - \sin(x'-y)\right]
$$

Da x, x' og y er kendte kan højresiden udregnes: Udover to opslag i en *sinustabel* anvendes to subtraktioner, en addition og en simpel division. Man skal nu, jævnfør (2), lægge 0,4348124 til, hvorefter man har højresiden i (1). Udregningen afsluttes med at gå omvendt ind i en *sinustabel* for at finde b. Det giver $b = 48°51,5'$.