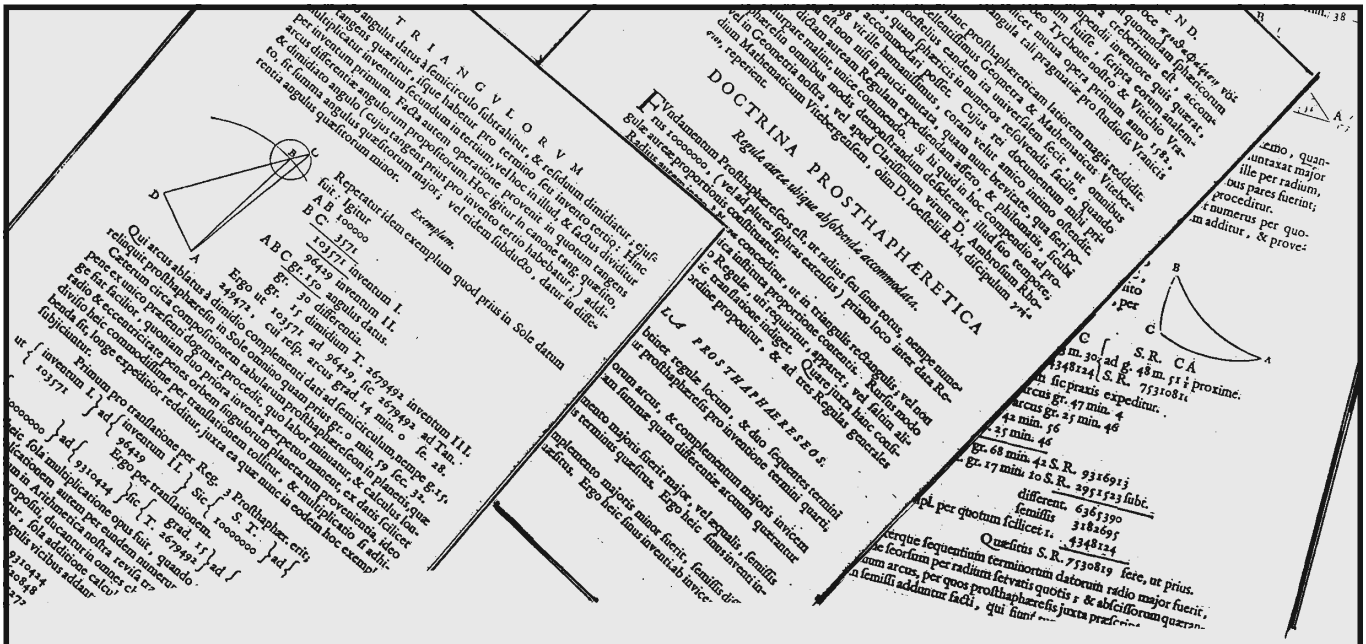
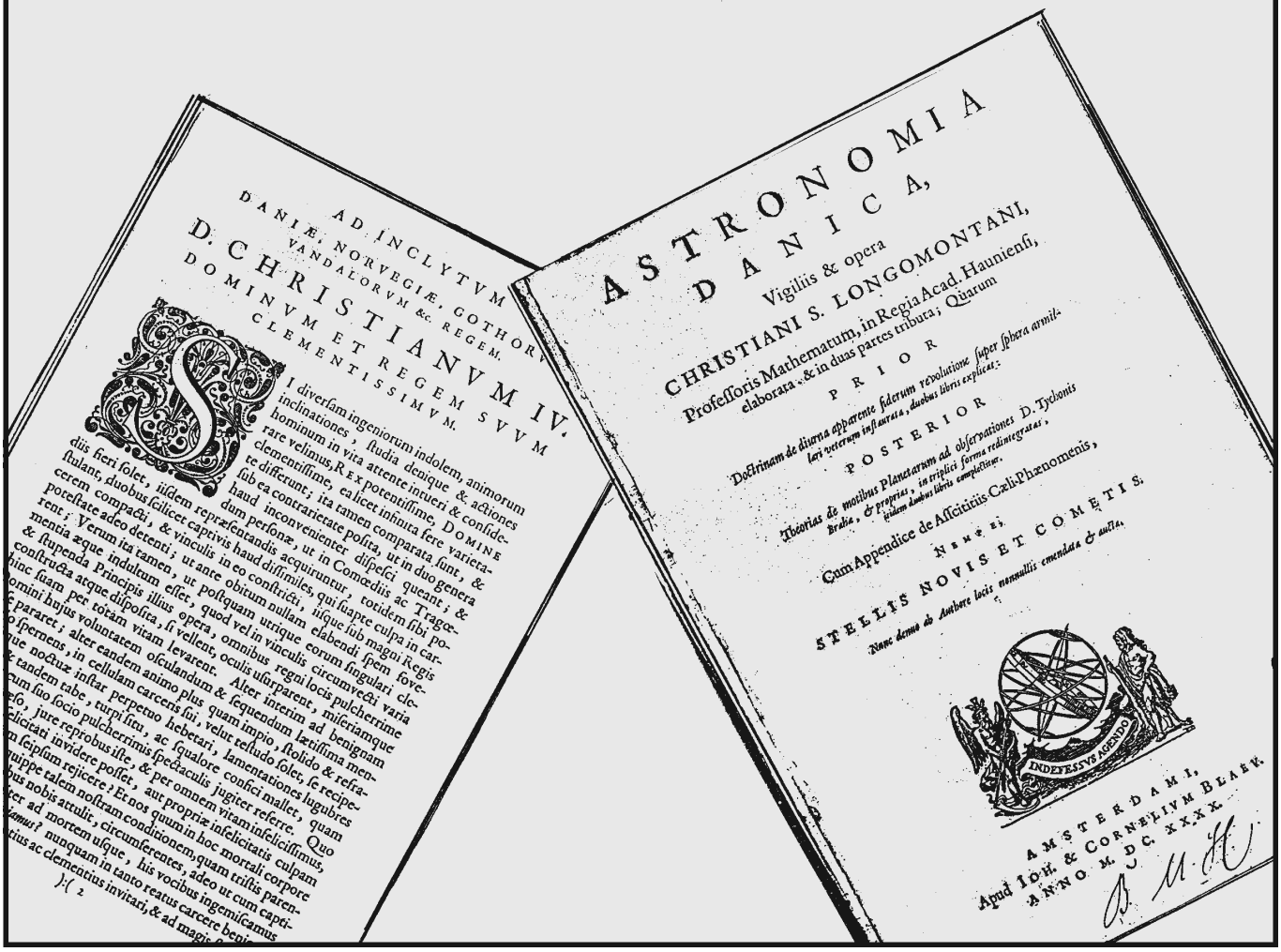


Prosthaphaeresis

ved Tycho Brahes assistent Longomontanus



ASTRONOMIA DANICA,

Vigiliis & opera

CHRISTIANI S. LONGOMONTANI,

Professoris Mathematum, in Regia Acad. Hauniensi, elaborata, & in duas partes tributa; Quarum

PRIOR

Doctrinam de diurna apparente siderum revolutione super sphera armillari veterum instaurata, duobus libris explicat:

POSTERIOR

Theorias de motibus Planetarum ad observationes D. Tychonis Brahæ, & proprias, in triplici forma redintegratas, itidem duobus libris complectitur.

Cum Appendice de Assciititiis Cæli Phænomenis,

NEMPE,

STELLIS NOVIS ET COMETIS.

Nunc denuo ab Authore locis nonnullis emendata & aucta.

AMSTERDAMI,
Apud IOH. & CORNELIVM BLAEV.
ANNO M. DC. XXXX.

E libris
Florebos
Blomstow

numerorum additionem & ſubductionem (quas una voce προσθαφαίρεσιν vocant) abſolvit: præſertim quum talis praxis ſolutioni quorundam ſphæricorum triangulorum, quippe quorum uſus in ſphæra creberrimus eſt, accommodatiſſima fuerit. Si autem de hujus compendii inventore quis quærat, nec Arabes, aut Ioannem Regiomontanum fuiſſe, ſcripta eorum analemmatica declarent; neminem certe habeo Tychone noſtro & Vitichio Vratiſlavienſi antiquiorem: quorum ſcilicet mutua opera primum anno 1582, in Huæna, ſphærica quædam triangula tali pragmatiæ pro ſtudioſis Vranicis ſunt ſubjecta.

Poſtea Clavius doctrinam hanc proſthaphæreticam latiorem magis reddidit. Sed ultimo omnium, Excellentiſſimus Geometra & Mathematicus Vitebergenſis D. Melchior Ioeſtelius eandem ita univerſalem fecit, ut omnibus triangulis tam planis, quam ſphæricis in numeros reſolvendis facile, quando id expetebatur, accommodari poſſet. Cujus rei documentum mihi primum anno 1598 vir ille humaniſſimus, coram velut amico intimo oſtendit. Ea doctrina eſt non niſi in paucis mutata, quam nunc brevitate, qua fieri poteſt, ad dictam auream Regulam expediendam affero, & philomatis, ſicubi eam uſurpare malint, unice commendo. Si hi quid in hoc compendio ad proſtaphæreſin omnibus modis demonſtrandum deſiderent, illud ſuo tempore, vel in Geometria noſtra, vel apud Clariſſimum virum D. Ambroſium Rhodium Mathematicum Vitebergenſem, olim D. Ioeſtelii B. M. diſcipulum γνήσιον, reperient.

DOCTRINA PROSTHAPHÆRETICA

Regulæ aureæ ubique abſolvendæ accommodata.

FVndamentum Proſthaphæreſeos eſt, ut radius ſeu ſinus totus, nempe numerus 10000000, (vel ad plures ſiphras extenſus) primo loco inter data Regulæ aureæ proportionis conſtituatur.

Radius autem inter διδόμενα conceditur, ut in triangulis rectangulis; vel non conceditur, ut in cæteris unica inſtituta proportione contentis. Rurſus modo radius datur, vel primo loco Regulæ, uti requiritur, apparet; vel ſaltim aliquo ſequentium, & ideo heic tranſlatione indiget. Quare juxta hanc conſiderationem Doctrina hæc ordine proponitur, & ad tres Regulas generales reſtringitur.

PRIMA REGVLA PROSTHAPHAERESEOS.

Theor. 8. QVando radius primum obtinet regulæ locum, & duo ſequentes termini ſunt ſinus recti; perficitur proſthaphæreſis pro inventione termini quarti, hoc modo.

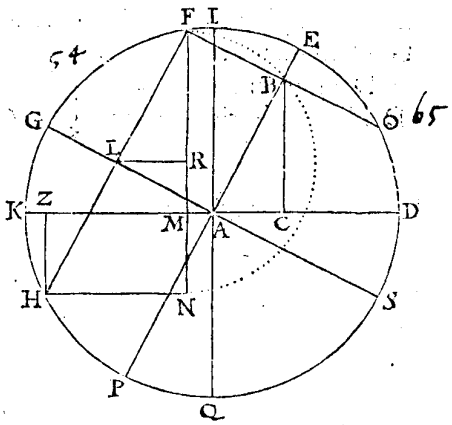
1. Minor datorum reliquorum arcus, & complementum majoris invicem addantur & ſubtrahantur, & tam ſummæ quam differentiæ arcuum quærantur ſinus recti.

Prior Caſus 2. Si minor arcus complemento majoris fuerit major, vel æqualis, ſemiſſis aggregati ſinuum erit quartus terminus quæſitus. Ergo heic ſinus inventi invicem adduntur, &c.

Poſterior Caſus. 3. Sin vero minor arcus complemento majoris minor fuerit, ſemiſſis differentiæ erit quartus terminus quæſitus. Ergo heic ſinus inventi ab invicem ſubtrahuntur, &c.

De-

Demonstratio & exemplum casus prioris.



Præcedentis præcepti declaratio in præsenti diagrammate & adjecto exemplo satis manifesta est. Sit major arcus datorum D E grad. 65., minor vero F G gra. 54, quorum ille angulus est B A C; hic latus B A trianguli rectanguli B C A, cujus mensura est arcus F G, seu saltim sinus rectus ejusdem; & angulus ad C rectus; propositum est hinc invenire latus B C, & arcum eidem correspondentem; quod facile contingit per Enunciat. 2 & 1.

S.T. 4	B A vel F G	B A C vel E D	B C
Nam ut 90	ad grad. 54	Sic grad. 65	ad gr. 47 mi. 9
10000000	S.R. 8090170	S.R. 9063078	S.R. 7332184

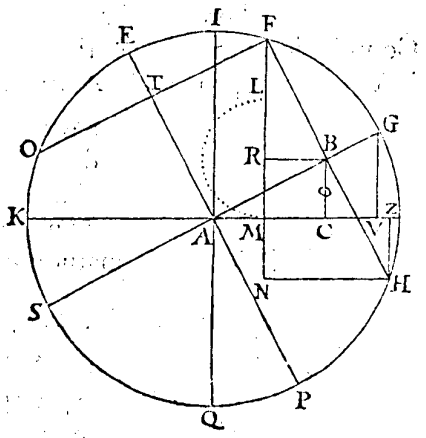
Idem per prosthaphæresin.

G F gr. 54 minor arcus
G K gr. 25 compl. arcus majoris.
F K gr. 79 aggregatum } Resp. S.R. { 9816272 F M
K H gr. 29 differentia } { 4848096 H Z vel M N.
aggr. sinuum 14664368 F N
semissis 7332184 F R vel B C quæsitum.

Apodixis hæc est, ut F H subtensa arcus F H ex aggregato & differentia, cujus summa dupla est arcus dati minoris F G, est ad F N, summam ex aggregati & differentiæ sinibus: Sic dimidium F H, hoc est, F L vel B A, ad dimidium F N: id est F R seu B C quæsitum, per Theorema 7.

Demonstratio & Exemplum casus posterioris.

Sit data primum obliquitas Solis maxima grad. 23 minut. 32, quæ in adjecto diagrammate per arcum D G, seu angulum B A C repræsentatur. Sit quoque major arcus datus E F grad. 50, cujus sinus rectus est T F seu A B. Igitur in triangulo rectangulo A C B quæritur hinc sinus B C, unde postea ejus arcus constat, nempe declinatio Solis congruens 20 gr. ♉. Facile autem per 7 Theor. B C habetur hoc modo:



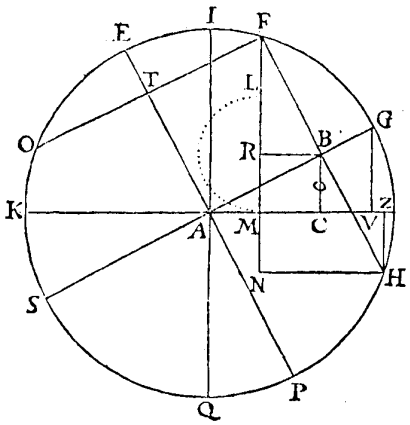
A G	G V vel G A D	
ut S.T.	ad gr. 23 min. 32	
10000000	S.R. 3992826.	
E F	B C	
Sic grad. 50	ad gr. 17, m. 48, s. 36.	
S.R. 7660445	S.R. 3058682.	

Sed

Sed per prosthaphæresin hoc modo :

F G compl. arcus majoris gr. 40
G D minor arcus - - gr. 23 min. 32
F D aggr. arcuum - - gr. 63 min. 32 S. R. 8951939 F M
D H differentia arcuum gr. 16 min. 28 S. R. 2834574 H Z vel M N.

Different. 6117365 L M
Semissis 3058682 R M seu B C.

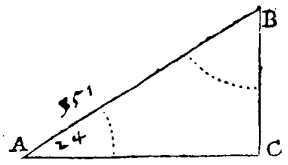


Quando reliqui termini non sunt sinus.

Apodixis & hic ex ipso diagrammate patet, ac notis numerorum transactioni adscriptis. Nam quum oporteat R M æqualem esse B C: Erit primum ut F H ad dimidium F B; sic F N ad dimidium ejus F R. Sublata vero M N de F M, remanet L M, cujus semissis est R M æqualis B C.

Porro cum sinus totus primum regulæ locum obtinet, & unus sequentium terminorum, vel etiam ambo non sunt sinus recti, sed tangentes, vel alii quicunque numeri, modo non fuerint numero majores; tunc illis qui non sunt sinus recti adduntur ad finem siphræ sufficientes, ut sinibus æquentur, & sic è Tabula Sinuum hisce arcus congruentes quærantur, ac si sinus recti essent, ac tractentur juxta præscriptam regulam primam prosthaphæreseos; & rursus numero quarto quæsito provenienti tot siphræ auferantur, quot prius erant adjectæ.

Exemplum 1



Sit trianguli plani rectanguli A B C data, præter angulum rectum ad C, etiambasis B A 351 p. Item angulus ad A grad. 24: quæritur ex hisce latus B C.

Regula juxta 2 Enunciatum ita stabit.

C	B A	C A B	B C
ut 90	ad	sic grad. 24	ad 143 fere.
S. T. 10000000	351 p.	S. R. 4067366	

Sed prosthaphæresis ita habet, juxta 2 Casum.

Complementum anguli dati gr. 66 min. 0
B A 3510000 pro S. R. Resp. arcus gr. 20 min. 33 —

aggregatum gr. 86 min. 33 S. R. 9981877
differentia gr. 45 min. 27 7126385
differentia sinuum - - - 2855492
Dimidium - - - - 1427746

Ergo sublatis ultimis quatuor siphris, quæsitum latus B C est 143 p. fere.

Exemplum 2, ubi neuter sequentium terminorum est sinus rectus.

Sit in adjecto Orthogonio A B C, latus C A datum 8 p. angulus autem ad A gr. 36 mi. 53; Ergo per 4 Theor. erit angulus ad B grad. 53 min. 7 dum triangulum propositum planum fuerit. Sed si absque hoc angulo ex datis quæ-

quæratur latus B C, invenitur illud per 4 Enunciat. posito enim C A radio, erit B C tangens anguli dati ad A; Nam

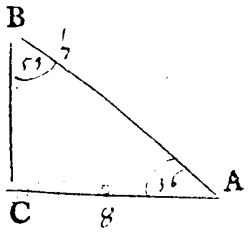
C	BAC	CA	BC
ut 90	ad gr. 36 mi. 53	Sic 8 p.	ad 6 p.
S. T. 10000000	T. 7503663		

Prosthaphæresis autem in hoc exemplo ex præcedente admonitione talis est:

C A 8000000 S. R. cui resp. arcus gr. 53 min. 7 +

C A B Tang. 7503663 tanquam S. R. resp. arcus gr. 48 min. 38 —

Hæc transiguntur juxta 1 casum regulæ, hoc modo:



gr. 48 m. 38 minor arcus.
gr. 36 m. 53 compl. major:

gr. 85 m. 31 aggreg. S. R. 9969401
gr. 11 m. 45 different S. R. 2036418

aggr. S. S. 12005819
dimidium 6002909 quæsitum.

Remotis igitur a fine sex siphris, provenit latus B C 6 p. Postremo, quando sequentes termini dati radio majores reperiuntur, aut alter duntaxat major erit, aut uterque. Si alter tantum radio major fuerit, dividatur ille per radium, retentis scilicet in eodem tot numeris, qui siphris in radio gradibus pares fuerint; & quotiente servato, cum retentis pro sinu recto ponendis proceditur.

Facta autem prosthaphæresi, multiplicatur datus minor numerus per quotientem prius servatum; factus inde ad inventum semissem additur, & provenit quartus Quæsitus.

Exemplum.

In apposito triangulo rectangulo sphærico A B C, dantur præter rectum angulum ad C, etiam angulus ad A gr. 30, cum latere opposito B C gr. 23 min. 30. Vnde quæritur latus A C, per 4 Enunciat. Nam

C ang. rectus	T. cõpl. BAC	T. B C	S. R. C A
ut grad. 90	ad grad. 60	sic gr. 23 m. 30	ad g. 48 m. 51 ½ proxime.
S. T. 10000000	T. 17320508	T. 4348124	S. R. 7531081.

Per Prosthaphæresin sic praxis expeditur.

T. 17320508 S. R. resp. arcus gr. 47 min. 4
T. 4348124 S. R. resp. arcus gr. 25 min. 46
Compl. majoris arcus gr. 42 min. 56
minor arcus gr. 25 min. 46

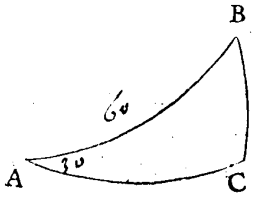
aggreg. gr. 68 min. 42 S. R. 9316913
different. gr. 17 min. 10 S. R. 2951523 subt.

different. 6365390
semissis 3182695
Minor multipl. per quotum scilicet 1. 4348124

Quæsitus S. R. 7530819 fere, ut prius.

Quando vero uterque sequentium terminorum datorum radio major fuerit, dividatur uterque seorsum per radium servatis quotis; & abscissorum quærantur e tabula sinuum arcus, per quos prosthaphæresis juxta præscripta perficitur, invento autem semissi adduntur facti, qui fiunt tum ex quoto tertii numeri in resi-

residuum secundum, tum ex quoto secundi in totum tertium, aut versa vice, si lubet. Aggregatum autem ex illis tribus dabit quartum Quæsitum.



Exemplum.

Sit in triangulo rectangulo A B C, angulo recto ad C, data basis A B grad. 60, angulus autem ad A grad. 30.

Ex his quæratur angulus reliquus ad B. Ergo per 5 & 6 Enunciata est:

C	BA	Compl. A	B
ut 90	ad grad. 60	sic 60	ad gr. 73 mi. 54
S. T. 10000000	Sec. 20000000	T. 17320508	34641016

Idem per prosthaphæresin ex præscriptis.

20000000 S. R. arcus resp. gr. 0 min. 0
7320508 S. R. arcus resp. gr. 47 min. 4
Complementum hujus gr. 42 mi. 56
Minor arcus gr. 0 min. 0

Aggregat. arcuum gr. 42 mi. 56 S. R. 6811470
Different. arcuum gr. 42 mi. 56 S. R. 6811470 subtr.
Differentia Sin. 0000000
Semissis, 0000000

Additur factus ex quoto tertii, nempe unitate, in residuum secundi 0000000, qui ideo est 0000000, seu nullus; & ex tertio toto, nempe 17320508, per 2, ut puta quotum de secundo. Est igitur in hoc exemplo idem factus, scilicet 34641016 quartus Quæsitus ut prius.

Succedit etiam in hisce Calculus, si demantur a fine numeri qui majores sunt radio, donec ad sinus rectos redigantur.

Item si tangens vel secans sicubi in proportionem incidens, se duobus siphris ultra radium circuli extenderit, ut primus ad sinistram pro quoto habeatur, & ultimus ad dextram rejiciatur, reliqui vero pro sinu recto sumantur. Sed praxis in hisce non tam præcise quæsita dabit, nisi arcus pro secundis rectissime fuerint emendati, & ex Opere Palatino depromti. Quod etiamsi pragmatiæ superiori contingat: tamen adhuc in illa prosthaphæresis certior erit, & a vero sensibiliter non differet.

His igitur exemplis quæ reliquimus, omnes casus prosthaphæreseos includuntur, ubicunque radius primum regulæ locum obtinuerit. Et certe quanquam interdum exiguum aut nullum compendium prosthaphæresis afferat, ut in postremis hujus regulæ casibus; tamen jucundum est, & ad δοκιμασίαν utile, illam sic universalem efficere, ut factus ex duobus quibuslibet numeris ad multiplicandum propositis per solam additionem & subductionem obtingat. Quæ praxis admodum expedita est, quum soli sinus recti, ut in primis exemplis, suffecerint.

SECVNDA REGVLA PROSTHAPHAERESEOS.

QVando radius seu sinus totus in secundo aut tertio loco regulæ ponitur, translatio adhibenda est, ut ille primum locum occupet, siquidem omnis prosthaphæresis radium primo loco ponendum efflagitat, ut supra dictum est. Translatio autem duobus præceptis, sed unica demonstratione, nititur.

Primum præceptum Translationis.

Si primum regulæ locum occupet quicunque numerus sinu toto major, huic e ta-

1. En nyttig formel

Lad mig uden bevis angive en nyttig trigonometrisk formel, som i dag kaldes for en *logaritmisk formel*:

(1) $$\sin(A)\cdot\sin(B) \;=\; \tfrac{1}{2}\big[\cos(A-B)-\cos(A+B)\big]$$

Navnet skyldes løst sagt, at en multiplikation på venstre side i formlen bliver omsat til en differens på højre side – en egenskab, som giver associationer til logaritmernes *produktregel:* $\log(x\cdot y)=\log(x)+\log(y)$. Vi skal se et eksempel på, hvorledes formlen (1) kan benyttes til at multiplicere to vilkårlige tal.

Eksempel 1.1

Tallene $a=438,2904$ og $b=23,81256$ ønskes multipliceret.

Løsning: Flyt kommaerne i *a* og *b*, så man får to tal a_1 og b_1, der begge ligger i intervallet $[-1,1]$:

(2) $$a\cdot b \;=\; a_1\cdot b_1\cdot 10^5$$

med $a_1=0,4382904$ og $b_1=0,2381256$. Vi vil nu bestemme to vinkler *A* og *B*, så

(3) $$\begin{aligned}\sin(A) &= a_1 = 0,4382904\\ \sin(B) &= b_1 = 0,2381256\end{aligned}$$

Bruges $\sin^{-1}$-tasten på lommeregneren, så får vi mulighederne $A=25,99485°$ og $B=13,77594°$. Summen og differensen af vinklerne fås nemt til $A+B=39,77079°$ og $A-B=12,21891°$. Cosinus til hver af disse gradtal giver:

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos(39,77079°)=0,7686098\\ \cos(A-B)&=\cos(12,21891°)=0,9773461\end{aligned}$$

Vi kan nu udregne højresiden i (1) ved at trække 0,7686098 fra 0,9773461 og dividere resultatet med 2, hvilket giver 0,1043682. Ifølge (1) og (3) har vi udregnet $\sin(A)\cdot\sin(B)=a_1\cdot b_1$. For endeligt at få udregnet $a\cdot b$ skal vi ifølge (2) blot flytte kommaet 5 pladser til højre. Det giver 10436,82.

□

Nu vil det ikke være særligt fornuftigt at benytte lommeregneren til på denne måde at udregne produktet af to tal; så kunne man jo lige så godt gange de to tal sammen direkte ved hjælp af lommeregneren! Før lommeregnerens tid har det imidlertid været forbundet med et stort arbejde at multiplicere og dividere store tal, hvorimod addition og subtraktion foregik noget nemmere. Indtil et godt stykke op i 1500-tallet havde man ikke noget bedre end den sædvanlige "skolemetode", hvor tallene stilles op ved siden af hinanden, og hvor man ganger cifre sammen og opstiller dem under hinanden – en metode, som stadig kort omtales i folkeskolen i dag. Så fandt man på at anvende formler såsom (1) til at lette multiplikationerne, og beregningsprocessen fik navnet *prosthaphaeresis*, der på græsk betyder *addition* og *subtraktion*. Idéen var at multiplikationer blev erstattet af mindre arbejdstunge additioner og subtraktioner. Hertil kommer dog tabelopslag, idet man måtte bruge trigonometriske tabeller. Tænker man sig for eksempel formel (1) anvendt, så skal man foretage 2 subtraktioner, 1 addition, 4 tabelopslag samt en simpel multiplikation med 0,5. De første to tabelopslag består i at man finder A og B ved at gå omvendt ind i en sinustabel. De sidste to består i, at man aflæser cosinus til $A-B$ og $A+B$ i en cosinus-tabel.

Øvelse 1.2

a) Anvend formel (1) til at gange 55,82316 med 4207,175. Prøv eventuelt at få fat i en gammel sinus-tabel og cosinus-tabel, ellers "snyd" ved at bruge lommeregneren som "tabel". Du *skal* dog foretage additionerne, subtraktionerne og den simple multiplikation i hånden. Kontrollér resultatet med det, som en lommeregner vil give. Hvor stor er nøjagtigheden?
b) Foretag multiplikationen fra spørgsmål a) ved hjælp af "skolemetoden".
c) Vurdér metoderne i forhold til hinanden.

En fordel ved at anvende prosthaphaeresis er, at man nok ikke så nemt kommer til at lave en beregningsfejl som i tilfældet med skolemetoden, hvor der skal foretages et hav af simple multiplikationer samt et ikke ringe additionsarbejde.

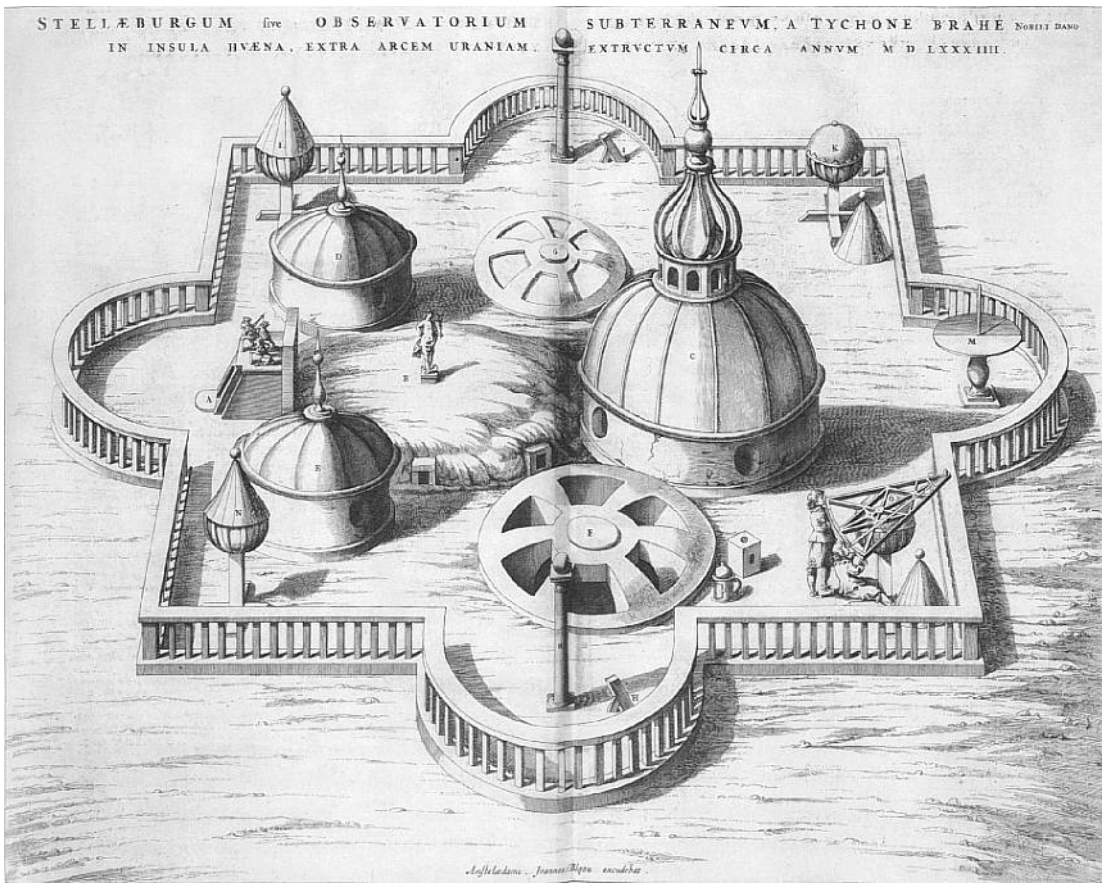
2. Astronomia Danica

Et centrum for anvendelse af Prosthaphaeresis var faktisk i Danmark, på øen *Hven* i Øresund. Her foretog *Tycho Brahe* (1546 – 1601) som bekendt en mængde observationer af himlens stjerner på sine residenser *Uranienborg* og *Stjerneborg*. Han bestemte stjernernes positioner på himmelkuglen med en på den tid uhørt stor nøjagtighed. I sit arbejde havde han blandt andet brug for at kunne beregne sider og vinkler i sfæriske trekanter. En *sfærisk trekant* er en trekant, der befinder sig på en kugleoverflade. Til beregningsarbejdet, der inkluderede mange multiplikationer, havde Tycho Brahe assistenterne *Longomontanus* og *Paul Wittich*. Longomontanus udgav i 1622

en bog med titlen *Astronomia Danica*, hvori han gjorde rede for de regnemetoder, der blev anvendt på Hven.

I bogen *Tyge Brahe* skrevet af Alex Wittendorff, forklares det, at Longomontanus' oprindelige navn var *Christen Sørensen*. Christen Sørensen var bondesøn, og da han blev en studeret mand, tog han efter tidens skik navn efter sit hjemsted, som var *Lomborg* ved Lemvig. Lomborg blev altså til Longomontanus på latin. Trods fattigdom lykkedes det ham at blive student som 26 årig. Et par år efter blev han anbefalet til Tycho Brahe af en af universitetets professorer. Han havde sjældne evner som matematisk beregner og faldt godt til på Hven. Efter Tycho Brahe havde forladt øen studerede Christen videre i Tyskland og arbejdede igen hos Tycho Brahe i Böhmen. I 1605 blev han professor ved Københavns Universitet, fra 1607 i matematik og astronomi. Hans titel af matematik-professor kan også aflæses på forsiden af Astronomia Danica! Det var under Longomontanus' ledelse, at observatoriet på Rundetårn blev indrettet. Desuden stod han for udgivelsen af universitetets almanak.

Kun de af Tycho Brahes assistenter, der viste sig dygtigst, blev inddraget i de avancerede beregningsarbejder. Alle kunne derimod hjælpe til ved observationerne. Det var den danske konge, Frederik den 2.'s hensigt, at Uranienborg skulle være et førsterangs forskningscenter, hvilket det også blev.



Tycho Brahes observatorium Stjerneborg på øen Hven i Øresund

I det følgende skal du undersøge, hvad der går for sig i eksempel 1 på side 10 i Longomontanus' værk, *Astronomia Danica*, idet du husker hovedidéen i metoden, beskrevet i denne notes afsnit 1. Situationen i Longomontanus' eksempel er dog en smule anderledes, idet en eller flere af de tal, som han ønsker at gange sammen, er et trigonometrisk udtryk i sig selv. Denne kendsgerning gør dog bare Prosthaphaeresis ekstra fordelagtig. Det skal desuden bemærkes, at Tycho Brahe var i besiddelse af en sinustabel, men *ikke* en cosinustabel. Førstnævnte kan dog benyttes som cosinustabel, når man husker på formlen $\cos(x) = \sin(90° - x)$. Endvidere er tallene i *Astronomia Danica* angivet uden decimalkomma, så man må "gætte sig til", hvor kommaet skal stå. Brugen af et komma (eller punktum) til at adskille heltalsdelen og brøkdelen af et tal var kun så småt ved at blive taget i brug i begyndelsen af 1600-tallet.

Øvelse 2.1

a) Hvad er udgivelsesåret for den betragtede udgave *af Astronomia Danica* ?

b) Bevis formlen $\cos(x) = \sin(90° - x)$ ved at betragte enhedscirklen.

c) Brug formlen under punkt b) samt den logaritmiske formel (1) ovenfor til at bevise følgende formel, hvor $A' = 90° - A$ er *komplementet* til A:

(4) $$\sin(A)\cdot\sin(B) = \tfrac{1}{2}\left[\sin(A'+B) - \sin(A'-B)\right]$$

Det var reelt denne formel, som blev anvendt på Hven, selvom man anvendte en anden notation.

d) Se på tegningen af den plane trekant på side 10 i *Astronomia Danica:* Hvordan vil du selv løse opgaven med at bestemme siden BC ? (Angiv et udtryk med en trigonometrisk funktion) Hvad får du som resultat?

e) Forestil dig, at du levede i 1600-tallet og skulle udregne det udtryk, du fandt for siden BC i spørgsmål d); dvs. at du kun måtte gøre brug af formel (4). Hvordan ville du da udføre beregningen? Gør det!

f) Tycho Brahe angav vinkler i grader og minutter. Her svarer $60'$ (læses 60 *bueminutter* eller bare 60 *minutter*) til $1°$. Vinklen $23°39'$ svarer således til en vinkel på $(23 + 39/60)° = 23,65°$. I eksempel 1 anføres blandt andet en vinkel $20°33'$, dog skrevet med en anden notation. Hvad svarer denne vinkel til i grader med decimaldele (kommatal)?

g) Oversæt det, som Longomontanus' gør i sit eksempel 1, til moderne matematik. *Hjælp:* Prøv dig frem på lommeregneren for at finde ud af, hvorfra de forskellige tal stammer, idet du har løsningen af spørgsmål e) for øje!

h) Hvor præcis er den værdi, som Longomontanus får for siden BC? Hvilken deludregning i processen er mest unøjagtig, tror du?

Øvelse 2.2

Det antages, at læseren er bekendt med pointerne i øvelse 2.1. I denne øvelse skal du finde ud af, hvad der foregår i *Exemplum 2* side 10-11 i *Astronomia Danica*.

a) Betragt den plane trekant i opgaven side 11. Hvilke størrelser skal man finde og hvilke kender man?
b) Hvordan vil du selv løse opgaven ved hjælp af en simpel 1g trekantsberegning?
c) Der forekommer en multiplikation i beregningen i b). Husk, at Longomontanus vil udføre multiplikationer via Prosthaphaeresis, så han skal have lavet multiplikationen om til et produkt af to sinus'er. Herefter vil han benytte følgende variation af formel (4):

   (5) $$\sin(D)\cdot\sin(E)=\tfrac{1}{2}\left[\sin(E+D')+\sin(E-D')\right]$$

   Bemærk, at vinklerne D og E ikke har noget at gøre med vinklerne i trekanten. De er blot en "mellemregning" til at kunne foretage multiplikationen! Vis rigtigheden af formel (5).
d) Find ud af hvordan Longomontanus løser opgaven, blandt andet ved hjælp af formel (5).

Bemærkning: En af de vinkler, som Longomontanus benytter i sine mellemregninger viser sig at være lig med en af vinklerne i trekanten. Dette er en tilfældighed, fordi siderne i Longomontanus' eksempel er nogle meget pæne tal! Men bliv ikke forvirret af det!

3. Logaritmernes fremkomst

Selvom de prosthaphaeresiske regler kun var et skridt på vejen i udviklingen af regnekunsten, så menes de at have været en vigtig inspirationskilde til opdagelsen af *logaritmerne*. Skotten *John Napier* (1550 – 1617), som normalt tilskrives æren for at have indført logaritmerne, skal have lært om Prosthaphaeresis gennem en bekendt, *John Craig*, som var læge for kong James den 6. af Skotland. Kongen var i 1590 på en sejltur til Danmark for at møde sin kommende brud, prinsesse Anna, datter af den danske konge Frederik den 2. Craig skal have været med på turen og stiftet kendskab til Prosthaphaeresis i forbindelse med et besøg på Tycho Brahes observatorium.

Efter John Napier præsenterede sin specielle logaritme kom englænderen *Henry Briggs* (1561 – 1631) til og indførte den nu velkendte titalslogaritme. Helt indtil 1970'erne har logaritmerne spillet en fundamental rolle som middel til at lette arbejdet ved numeriske beregninger. Logaritmernes betydning i dag, hvor vi har computere og lommeregnere, ligger derimod først og fremmest i den teoretiske matematik.

Øvelse 3.1

a) Fremskaf en titals-logaritmetabel samt en antilogaritmetabel, gerne firecifrede tabeller fra *Erlang C. Produktreglen*

$$\log(x \cdot y) \;=\; \log(x) + \log(y)$$

giver følgende identitet: $x \cdot y \;=\; 10^{\log(x \cdot y)} \;=\; 10^{\log(x)+\log(y)}$. Benyt sidstnævnte formel til at multiplicere tallene 3,782 og 62,98.

Hjælp: Bemærk, at en sædvanlig logaritmetabel kun kan anvendes *direkte* i intervallet $[1, 10[$, og en sædvanlig antilogaritmetabel (10^x) kun i intervallet $[0, 1[$. Heldigvis kan man også bestemme logaritmen og antilogaritmen til tal, der ligger udenfor de pågældende intervaller. Man foretager blot nogle små "korrektioner", som det fremgår af følgende eksempler:

$$\log(37,49) = \log(10 \cdot 3,749) = \log(10) + \log(3,749) = 1 + \log(3,749)$$

$$\log(0,03298) = \log(10^{-2} \cdot 3,298) = \log(10^{-2}) + \log(3,298) = -2 + \log(3,298)$$

$$10^{3,426} = 10^3 \cdot 10^{0,426} = 1000 \cdot 10^{0,426}$$

$$10^{-1,324} = 10^{-2+0,676} = 10^{-2} \cdot 10^{0,676}$$

Disse korrektioner kan nærmest klares i hovedet.

b) Diskutér fordele ved logaritmerne i forhold til de prosthaphaeresiske regler. Kan logaritmerne med fordel bruges til andet end multiplikationer?