# g-påvirkning i rutsjebane

I denne note skal vi indføre begrebet *g-påvirkning* for en person, som sidder i en vogn, der bevæger sig rundt i en rutsjebane i et lodret plan. Dette skal vi gøre via begrebet *relativ bevægelse*.

**Definition 1**

g-påvirkningen defineres som $|\vec{g}_{\text{eff}}|$, hvor $\vec{g}_{\text{eff}}$ er den *effektive tyngdeaccelerationsvektor*, som personen føler i et relativt system, hvori personen er i hvile.

Da vi kun vil beskæftige os med rutsjebaner, som kan antages at forløbe i et lodret plan kan vi nøjes med at beskrive problemet via teorien om *relativ bevægelse i planen*. Situationen vil blive ridset op i det følgende. For det første antager vi, at den bane, som rutsjebanen danner, kan beskrives ved en 2 gange kontinuert differentiabel vektorfunktion $\vec{r}_Q = \vec{r}_Q(t)$, hvor $t$ er tiden. Det medfølgende koordinatsystem $(Q, \vec{t}, \vec{n})$ har begyndelsespunkt i $Q$ og er udspændt af enhedsvektorerne $\vec{t}$ og $\vec{n}$, som er henholdsvis en tangentvektor og en normalvektor til kurven i $Q$. Et punkt $P$ beskrives ved koordinatfunktionerne $\xi = \xi(t)$ og $\eta = \eta(t)$ i det relative system $(Q, \vec{t}, \vec{n})$. Punktet $P$ kan da, som funktion af tiden, beskrives ved stedvektoren $\vec{r}_P(t)$ i det absolutte system:

(1) $$\vec{r}_P(t) \;=\; \vec{r}_Q(t) + \xi(t)\cdot\vec{t}(t) + \eta(t)\cdot\vec{n}(t) \quad \text{eller bare} \quad \vec{r}_P \;=\; \vec{r}_Q + \xi\cdot\vec{t} + \eta\cdot\vec{n}$$

når afhængigheden af $t$ undertrykkes. Det kan være hensigtsmæssigt at indføre den *relative vektor* $\vec{r}_r = \xi\cdot\vec{t} + \eta\cdot\vec{n}$, så $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \vec{r}_r$.

Vi kan nu finde hastigheden af punktet $P$ ved at differentiere (1) med hensyn til $t$:

(2) $$\vec{r}_P{}' \;=\; (\vec{r}_Q{}' + \xi\cdot\vec{t}\,' + \eta\cdot\vec{n}\,') + (\xi'\cdot\vec{t} + \eta'\cdot\vec{n})$$

Leddene i første parentes skyldes, at det relative system bevæger sig og det betegnes derfor *medføringshastigheden*, mens leddene i sidste parentes vedrører $P$'s bevægelse i forhold til det relative system og derfor kaldes den *relative hastighed*. Vi kan skrive:

(3) $$\vec{v}_P \;=\; \vec{v}_{\text{m}} + \vec{v}_{\text{r}}$$

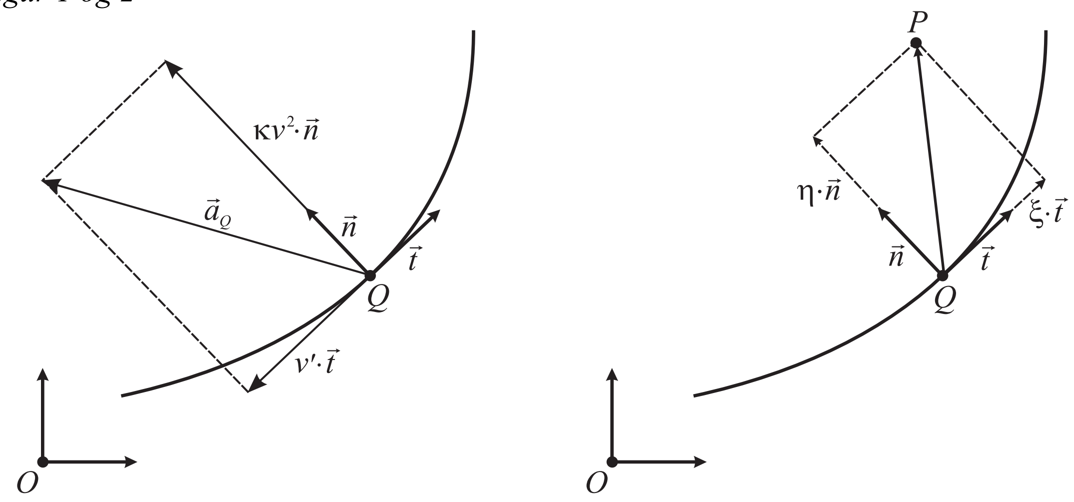
Hvis vi differentierer (2) fås et udtryk for accelerationen af punktet $P$:

(3) $$\vec{r}_P{}'' \;=\; (\vec{r}_Q{}'' + \xi\cdot\vec{t}\,'' + \eta\cdot\vec{n}\,'') + (\xi''\cdot\vec{t} + \eta''\cdot\vec{n}) + 2\cdot(\xi'\cdot\vec{t}\,' + \eta'\cdot\vec{n}\,')$$

Igen vedrører leddene i første parentes bevægelsen af det relative system, mens leddene i den anden vedrører accelerationen i forhold til det relative system. Derfor kaldes de to første parenteser for henholdsvis *medføringsaccelerationen* og den *relative acceleration*. Den sidste parentes kaldes for *Coriolis accelerationen*. Vi skriver:

(4) $$\vec{a}_P \;=\; \vec{a}_{\text{m}} + \vec{a}_{\text{r}} + \vec{C}$$

*Figur 1 og 2*




Ved hjælp af (4) fås følgende udtryk for den relative acceleration:

(5) $$\vec{a}_{\mathrm{r}} \;=\; \vec{a}_P - \vec{a}_{\mathrm{m}} - \vec{C} \;=\; \vec{a}_P + \vec{a}_{\mathrm{fiktiv}}$$

hvor vi har indført begrebet den *fiktive acceleration* $\vec{a}_{\mathrm{fiktiv}} = -\vec{a}_{\mathrm{m}} - \vec{C}$. Dette begreb hænger sammen med, at hvis man ønsker at bruge *Newtons 2. lov* på et accelereret henførelsessystem, så skal man medregne nogle *fiktive kræfter*: $\vec{F}_{\mathrm{fiktiv}} = -m \cdot \vec{a}_{\mathrm{m}} - m \cdot \vec{C}$, hvor $m$ er massen af genstanden der bevæges.

En person, som befinder sig i tyngdefeltet og på en eller anden måde accelereres i dette felt, vil opleve en *effektiv tyngdeacceleration* $\vec{g}_{\mathrm{eff}}$, som er lig med tyngdeaccelerationen $\vec{g}$ korrigeret for den fiktive acceleration:

(6) $$\vec{g}_{\mathrm{eff}} \;=\; \vec{g} - \vec{a}_{\mathrm{m}} - \vec{C}$$

Tilbage til figur 1: Den udtrykker den kendsgerning, som vi antager kendt, nemlig opløsningen af accelerationsvektoren i en retning tangentielt med banekurven og én vinkelret derpå:

(7) $$\vec{a}_Q \;=\; \vec{r}_Q'' \;=\; v' \cdot \vec{t} + \kappa v^2 \cdot \vec{n}$$

hvor $v$ er farten, $v'$ den afledede af farten og $\kappa$ er krumningen af banekurven i $Q$. Lad $\theta = \theta(t)$ være vinklen, som $\vec{t}$ danner med første basisvektor i det faste koordinatsystem. Man kan da vise, at den øjeblikkelige *vinkelhastighed* $\omega$ af det relative system er givet ved udtrykket $\omega = \theta' = \kappa \cdot v$. Endvidere kan man vise, at man får følgende udtryk for de afledede af basisvektorerne i det relative system: $\vec{t}\,' = \omega \cdot \vec{n}$ og $\vec{n}\,' = -\omega \cdot \vec{t}$. Og differentieres en gang mere fås $\vec{t}\,'' = \omega' \cdot \vec{n} - \omega^2 \cdot \vec{t}$ og $\vec{n}\,'' = -\omega' \cdot \vec{t} - \omega^2 \cdot \vec{n}$. Sammenholdes disse udtryk med (3), (6) og (7) fås:

(8)
$$\begin{aligned}\vec{g}_{\text{eff}} &= \vec{g}-\vec{a}_{\text{m}}-\vec{C}\\ &= \vec{g}-\left(\vec{r}_Q{}''+\xi\cdot\vec{t}\,''+\eta\cdot\vec{n}\,''\right)-2\cdot\left(\xi'\cdot\vec{t}\,'+\eta'\cdot\vec{n}\,'\right)\\ &= \vec{g}-\left(v'\cdot\vec{t}+\kappa v^2\cdot\vec{n}+\xi\cdot(\omega'\cdot\vec{n}-\omega^2\cdot\vec{t})+\eta\cdot(-\omega'\cdot\vec{t}-\omega^2\cdot\vec{n})\right)\\ &\quad -2\cdot\left(\xi'\cdot\omega\cdot\vec{n}-\eta'\cdot\omega\cdot\vec{t}\right)\\ &= \vec{g}+\left(-v'+\xi\cdot\omega^2+\eta\cdot\omega'+2\cdot\eta'\cdot\omega\right)\cdot\vec{t}\\ &\quad +\left(-\kappa v^2-\xi\cdot\omega'+\eta\cdot\omega^2-2\cdot\xi'\cdot\omega\right)\cdot\vec{n}\end{aligned}$$

Det sidste led, som repræsenterer Coriolis accelerationen er 0, da vi antager, at personen befinder sig i hvile i det relative system. I tredje linje er medføringsaccelerationen delt op i to bidrag. Det første er accelerationen af det relative systems begyndelsespunkt $Q$. Det andet vedrører rotationen af det relative system. I de fleste tilfælde med en rutsjebane vil rotationsbidraget være lille sammenlignet med bidraget fra begyndelsespunktets acceleration, blandt andet fordi vinkelhastigheden ikke er så stor og fordi personens udstrækning i forhold til punktet $Q$ ikke er stor – dvs. $\xi$ og $\eta$ er ikke store! Bemærk i den sammenhæng, at forskellige punkter på personen vil have forskellige effektive tyngdeaccelerationer ...

Hvis man ser bort fra rotationsbidraget fås følgende udtryk for den effektive tyngdeacceleration til tidspunktet $t$:

(9)
$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g}-v'\cdot\vec{t}-\kappa v^2\cdot\vec{n}$$

g-påvirkningen er da størrelsen af denne vektor!

## Relativ bevægelse i rummet

Vi skal se på relativ bevægelse i rummet. Det relative koordinatsystem er $(Q,\vec{t},\vec{n},\vec{b})$. Da fås analogt til punkterne (1) – (5):

(10) $$\vec{r}_P(t) \;=\; \vec{r}_Q(t)+\vec{r}_r(t) \;=\; \vec{r}_Q(t)+\xi(t)\cdot\vec{t}(t)+\eta(t)\cdot\vec{n}(t)+\zeta(t)\cdot\vec{b}(t)$$

eller bare $\vec{r}_P \;=\; \vec{r}_Q+\vec{r}_r \;=\; \vec{r}_Q+\xi\cdot\vec{t}+\eta\cdot\vec{n}+\zeta\cdot\vec{b}$.

(11) $$\vec{r}_P{}' \;=\; (\vec{r}_Q{}'+\xi\cdot\vec{t}\,'+\eta\cdot\vec{n}\,'+\zeta\cdot\vec{b}\,')+(\xi'\cdot\vec{t}+\eta'\cdot\vec{n}+\zeta'\cdot\vec{b})$$

(12) $$\vec{v}_P \;=\; \vec{v}_{\mathrm{m}}+\vec{v}_{\mathrm{r}}$$

(13) $$\begin{aligned}\vec{r}_P{}'' \;=\; &(\vec{r}_Q{}''+\xi\cdot\vec{t}\,''+\eta\cdot\vec{n}\,''+\zeta\cdot\vec{b}\,'')+(\xi''\cdot\vec{t}+\eta''\cdot\vec{n}+\zeta''\cdot\vec{b})\\ &+2\cdot(\xi'\cdot\vec{t}\,'+\eta'\cdot\vec{n}\,'+\zeta'\cdot\vec{b}\,')\end{aligned}$$

(14) $$\vec{a}_P \;=\; \vec{a}_{\mathrm{m}}+\vec{a}_{\mathrm{r}}+\vec{C}$$

I det følgende vil vi forsøge at udtrykke (12) og (14) på en anden måde.

De afledede af vektorerne $\vec{t}\,'$, $\vec{n}\,'$ og $\vec{b}\,'$ er vektorer i rummet og kan som sådanne udtrykkes i den ortonormale basis $\{\vec{t},\vec{n},\vec{b}\}$:

(15) $$\begin{aligned}\vec{t}\,' &= a_{11}\vec{t} \;+\; a_{12}\vec{n} \;+\; a_{13}\vec{b}\\ \vec{n}\,' &= a_{21}\vec{t} \;+\; a_{22}\vec{n} \;+\; a_{23}\vec{b}\\ \vec{b}\,' &= a_{31}\vec{t} \;+\; a_{32}\vec{n} \;+\; a_{33}\vec{b}\end{aligned}$$

Idet $0=(1)'=\left(\vec{t}\bullet\vec{t}\right)'=\vec{t}\,'\bullet\vec{t}+\vec{t}\bullet\vec{t}\,'=2\vec{t}\bullet\vec{t}\,' \Leftrightarrow \vec{t}\bullet\vec{t}\,'=0$ og tilsvarende for de andre to basisvektorer. Det betyder, at $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$. Da $0=(0)'=\left(\vec{t}\bullet\vec{n}\right)'=\vec{t}\,'\bullet\vec{n}+\vec{t}\bullet\vec{n}\,'$ fås $\vec{t}\bullet\vec{n}\,'=-\vec{t}\,'\bullet\vec{n}$, hvilket ifølge (15) umiddelbart giver $a_{12}=-a_{21}$. Man får $a_{13}=-a_{31}$ og $a_{23}=-a_{32}$ på tilsvarende måde. Så kun tre af de ni koefficienter i (15) er altså uafhængige. Vi indfører nye betegnelser:

(16) $$\begin{aligned}\omega_x &= \vec{n}\,'\bullet\vec{b} \;=\; a_{23} \;=\; -a_{32}\\ \omega_y &= \vec{b}\,'\bullet\vec{t} \;=\; a_{31} \;=\; -a_{13}\;,\\ \omega_z &= \vec{t}\,'\bullet\vec{n} \;=\; a_{12} \;=\; -a_{21}\end{aligned}$$

Vektoren $\vec{\omega}=\omega_x\vec{t}+\omega_y\vec{n}+\omega_z\vec{b}$ betegnes *drejningsvektoren*. Med de nye betegnelser bliver (15) umiddelbart til følgende:

(16)
$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \qquad\quad \omega_z \vec{n} - \omega_y \vec{b} \\ \vec{n}\,' &= -\omega_z \vec{t} \qquad\quad + \omega_x \vec{b} \\ \vec{b}\,' &= \omega_y \vec{t} - \omega_x \vec{n} \end{aligned}$$

Idet $\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{n}$, $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = -\vec{t} \times \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = -\vec{n} \times \vec{t}$ er relationerne mellem basisvektorernes krydsprodukter fås umiddelbart af definitionen af drejningsvektoren, lineariteten af krydsproduktet og sammenligning med (16), at:

(17)
$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \vec{\omega} \times \vec{t} \\ \vec{n}\,' &= \vec{\omega} \times \vec{n} \\ \vec{b}\,' &= \vec{\omega} \times \vec{b} \end{aligned}$$

Identiteterne (18), (19) og (20) nedenfor er definitioner. (21) fås ved at udnytte (17) og (18). (22) fås ved at udnytte (17) og (19). (23) fås ved at udnytte (17), (18) og (21). I alle tre tilfælde benyttes endvidere lineariteten af krydsproduktet.

(18)
$$\xi \cdot \vec{t} + \eta \cdot \vec{n} + \zeta \cdot \vec{b} = \vec{r}_r$$

(19)
$$\xi' \cdot \vec{t} + \eta' \cdot \vec{n} + \zeta' \cdot \vec{b} = \vec{v}_r$$

(20)
$$\xi'' \cdot \vec{t} + \eta'' \cdot \vec{n} + \zeta'' \cdot \vec{b} = \vec{a}_r$$

(21)
$$\begin{aligned} \xi \cdot \vec{t}\,' + \eta \cdot \vec{n}\,' + \zeta \cdot \vec{b}\,' &= \xi(\vec{\omega} \times \vec{t}) + \eta(\vec{\omega} \times \vec{n}) + \zeta(\vec{\omega} \times \vec{b}) \\ &= \vec{\omega} \times (\xi \cdot \vec{t} + \eta \cdot \vec{n} + \zeta \cdot \vec{b}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}_r \end{aligned}$$

(22)
$$\begin{aligned} \xi' \cdot \vec{t}\,' + \eta' \cdot \vec{n}\,' + \zeta' \cdot \vec{b}\,' &= \xi' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{t}) + \eta' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{n}) + \zeta' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{b}) \\ &= \vec{\omega} \times (\xi' \cdot \vec{t} + \eta' \cdot \vec{n} + \zeta' \cdot \vec{b}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v}_r \end{aligned}$$

(23)
$$\begin{aligned} \xi \cdot \vec{t}\,'' + \eta \cdot \vec{n}\,'' + \zeta \cdot \vec{b}\,'' &= \xi(\vec{\omega} \times \vec{t})' + \eta(\vec{\omega} \times \vec{n})' + \zeta(\vec{\omega} \times \vec{b})' \\ &= \xi(\vec{\omega}\,' \times \vec{t}) + \eta(\vec{\omega}\,' \times \vec{n}) + \zeta(\vec{\omega}\,' \times \vec{b}) \\ &\quad + \xi(\vec{\omega} \times \vec{t}\,') + \eta(\vec{\omega} \times \vec{n}\,') + \zeta(\vec{\omega} \times \vec{b}\,') \\ &= \vec{\omega}\,' \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) \end{aligned}$$

Hastigheden (11) og (12) af $P$ kan nu via (19) og (20) udtrykkes:

(24)
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\mathrm{m}} + \vec{v}_{\mathrm{r}} = (\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{r}_r) + \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

hvor $\vec{v}_{\mathrm{m}}$ er medføringshastigheden og $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ er den relative hastighed. $\vec{v}_Q$ er begyndelsespunktets hastighed. Accelerationen (13) og (14) af $P$ kan via (20, (21), (22) og (23) omskrives til:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_{\mathrm{m}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{C} \\ &= \vec{a}_Q + \vec{\omega}' \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \end{aligned} \tag{25}$$

Herefter defineres den *effektive tyngdeacceleration* som:

$$\vec{g}_{\mathrm{eff}} = \vec{g} - \vec{a}_Q - \vec{\omega}' \times \vec{r}_r - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) - \vec{\omega} \times \vec{v}_r \tag{26}$$

hvor $\vec{g}$ er den sædvanlige tyngdeacceleration, $\vec{a}_Q$ er *begyndelsespunktets acceleration*, $\vec{\omega}' \times \vec{r}_r$ er *vinkelaccelerationsleddet*, $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r)$ er *centrifugalleddet* og $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ er *Corioliseleddet*.